

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

10

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1931

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ДЕСЯТЫЙ.

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ И ТЕХНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Москва, Центр, Третьяковский проезд 1, ОНТИ, Главная редакция общетехнической и техно-теоретической литературы

Выпуск десятый „Математического просвещения“, составленный по образцу предыдущих, содержит статьи по элементарной и началам высшей математики.

В сборнике помещены задачи и решения задач предыдущих выпусков, а также указатель математической литературы, вышедшей во второй половине 1935 г.

Сборник „Математическое просвещение“ можно получать наложенным платежом. Заказы направлять по адресу: Москва, Рыбный переулок 2, помещение 49, „Техкнига почтой“. Телефон К-8-77-42.

Редакция *Р. Н. Бончковского.*

Корректурa *С. С. Гутнер.*

Сдано в производство 1/X-1936 г.

Печ. л. 4¹/₂. Уч.-авт. лист. 5,2. Тираж 5.000. Формат 62/94 1/16.

Печ. звак. в бум. л. 92.000. Количество бум. листов 2¹/₄. Заказ № 1030. Главн. ред. общ. лит. 51. Уполн. Главлита № В-46054.

Оформление *Е. Г. Шпак.*

Выпускающий *В. Т. Тимофеев.*

Подписано к печати 29/XI 1936 г.

ОБ ОДНОМ СВОИСТВЕ ТЕТРАЭДРА

И. И. Трифонов (Иваново)

Возьмем произвольный тетраэдр $ABCD$ (фиг. 1) и условимся площади его граней обозначать так:

пл. ECD через S_1 , пл. CDA через S_2 ,

пл. DAB через S_3 , пл. ABC через S_4 .

Докажем, что

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos M_3 - \\ - 2S_2S_3 \cos M_1 - 2S_3S_1 \cos M_2,$$

где M_1 , M_2 и M_3 — двугранные углы, образованные гранями CDA и DAB , DAB и BCD , BCD и CDA .

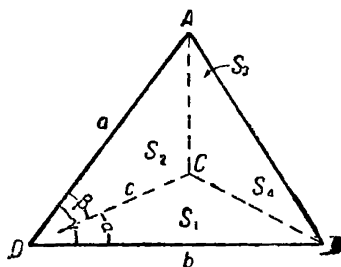
Для доказательства этой теоремы введем еще следующие обозначения: ребра трехгранного угла D обозначим через $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$; плоские углы его через $\angle CDB = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, $\angle ADB = \gamma$.

В треугольниках ADB , BDC и CDA имеем:

$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \\ BC^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ CA^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из формулы Герона с помощью формул (1) получим:

$$S_4^2 = \frac{1}{16} (AB + BC + CA) (AB + BC - CA) (BC + CA - AB) \times \\ \times (CA + AB - BC) = \\ = \frac{1}{16} (2AB^2 \cdot BC^2 + 2BC^2 \cdot CA^2 + 2CA^2 \cdot AB^2 - AB^4 - BC^4 - CA^4) = \\ = \frac{1}{16} [2(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) + \\ + 2(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)(c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta) + \\ + 2(c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta)(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) - \\ - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)^2 - (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)^2 - (c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta)^2] = \\ = \frac{1}{4} [a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) + b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha) + c^2a^2(1 - \cos^2 \beta) -$$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
& -2abc(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma - \\
& - a \cos \beta \cos \gamma - b \cos \gamma \cos \alpha - c \cos \alpha \cos \beta)] = \\
& = \frac{1}{4} \left[a^2 b^2 \sin^2 \gamma + b^2 c^2 \sin^2 \alpha + c^2 a^2 \sin^2 \beta - \right. \\
& - 2a^2 bc \sin \beta \sin \gamma \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} - 2ab^2 c \sin \alpha \sin \gamma \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} - \\
& \left. - 2abc^2 \sin \alpha \sin \beta \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right]. \quad (2)
\end{aligned}$$

Но, как известно ¹⁾,

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = \cos M_1,$$

$$\frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} = \cos M_2,$$

$$\frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \cos M_3.$$

Подставив в (2), будем иметь:

$$\begin{aligned}
S_4^2 = \frac{1}{4} (a^2 b^2 \sin^2 \gamma + b^2 c^2 \sin^2 \alpha + c^2 a^2 \sin^2 \beta - 2a^2 bc \sin \beta \sin \gamma \cos M_1 - \\
- 2ab^2 c \sin \alpha \sin \gamma \cos M_2 - 2abc^2 \sin \alpha \sin \beta \cos M_3). \quad (3)
\end{aligned}$$

Но

$$S_1 = \frac{bc \sin \alpha}{2}, \quad S_2 = \frac{ac \sin \beta}{2}, \quad S_3 = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), получим:

$$S_4^2 = \frac{1}{4} (4S_3^2 + 4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_2 S_3 \cos M_1 - 8S_3 S_1 \cos M_2 - 8S_1 S_2 \cos M_3),$$

или

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1 S_2 \cos M_3 - 2S_2 S_3 \cos M_1 - 2S_3 S_1 \cos M_2.$$

В частности, если ребра DA , DB и DC взаимно перпендикулярны, то имеем $S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$, т. е. квадрат площади грани тетраэдра, лежащей против прямого трехгранного угла, равен сумме квадратов остальных граней тетраэдра. Таким образом теорема Фаульхабера представляет частный случай доказанной нами общей теоремы, подобно тому, как теорема Пифагора есть частный случай теоремы, выражающей зависимость между элементами косоугольного треугольника.

¹⁾ См., например, Кр ан ц. Сферическая тригонометрия.

О ТРЕУГОЛЬНИКЕ МИНИМАЛЬНОГО ПЕРИМЕТРА, ВПИСАННОМ В ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Н. А. Извольский (Москва — Ярославль)

В недавно вышедшей в русском переводе книге Г. Радемахера и О. Теплица „Числа и фигуры“ имеются два доказательства (одно из них проф. Г. Шварца, другое — Л. Фейера) того, что таким треугольником служит тот, вершины которого суть основания высот данного. Мы будем в дальнейшем называть этот треугольник ортоцентрическим по отношению к данному.

Целью настоящей работы является: 1) дать новое, с моей точки зрения более простое, доказательство этого положения и 2) попутно дать ряд интересных соотношений для ортоцентрического и данного треугольников.

Замечу, что во время работы над этими вопросами я не имел еще 7-го выпуска „Математического просвещения“, где напечатана работа С. И. Зетеля, посвященная также ортоцентрическому треугольнику. Оказалось, что некоторые результаты, полученные мною, совпадают с тем, что дано в работе С. И. Зетеля, но: 1) методы их получения иные и 2) С. И. Зетель не разбирает основного вопроса, вопроса о периметрах вписанных треугольников.

Известна теорема Нагеля: прямая, соединяющая основания двух высот треугольника, перпендикулярна к радиусу описанного около треугольника круга, идущему в третью вершину.

Вот ее доказательство.

Пусть AD , BE и CF (фиг. 1) — высоты треугольника ABC , точка O — центр описанного круга; надо доказать, что, например, $EF \perp OA$.

Соединим O с A и с B и построим $OG \perp AB$. Тогда $\angle AOB$ будет центральным для круга O , а $\angle C$ — вписанным, опирающимся на ту же дугу. Следовательно,

$$\angle AOG = \angle C.$$

Далее имеем:

$$\angle AOG + \angle GAO = \frac{\pi}{2};$$

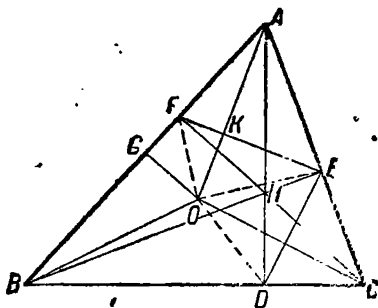
$$\angle C + \angle DAC = \frac{\pi}{2},$$

откуда получаем, что $\angle GAO = \angle DAC$, т. е. прямые AO и AN

(точка N есть точка пересечения высот или ортоцентр треугольника ABC) равно наклонены к сторонам треугольника. Отсюда еще вытекает:

$$\angle GAD = \angle OAC.$$

Пусть K есть точка пересечения прямых OA и EF . Тогда в силу равенств $\angle KAE = \angle BAD$ и $\angle KEA = \angle B$ (это потому что точки B , C , E и F лежат на одном круге) следует, что и третьи



Фиг. 1.

углы треугольников $KAЕ$ и BAD равны, т. е. $\angle AKE = \angle ADB = \frac{\pi}{2}$, или $OA \perp EF$.

Ясно, что это справедливо и для тупоугольного треугольника.

Соединив точки D , E и F , получим треугольник DEF , ортоцентрический для данного треугольника ABC , который считаем остроугольным.

Условимся в обозначениях.

Стороны и углы данного треугольника ABC будем, как обычно, обозначать через a , b , c , A , B и C ; его периметр через $2p$, площадь через Δ и радиус описанного круга через R ; стороны EF , FD и DE ортоцентрического треугольника DEF соответственно через a_1 , b_1 и c_1 ; его периметр через $2p_1$.

Соединим точку O с D , E и F . Мы легко видим, что

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } OEAF + \text{пл. } OFBD + \text{пл. } ODCE.$$

Далее получаем:

$$\text{пл. } OEAF = \text{пл. } OEA + \text{пл. } OAF = \frac{EF \cdot R}{2};$$

также

$$\text{пл. } OFBD = \frac{FD \cdot R}{2} \text{ и } \text{пл. } ODCE = \frac{DE \cdot R}{2}.$$

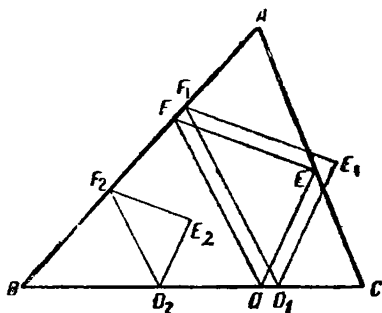
Подставив это в найденное выше равенство, получим:

$$\Delta = \frac{EF \cdot R}{2} + \frac{FD \cdot R}{2} + \frac{DE \cdot R}{2}.$$

Отсюда согласно приведенному выше обозначению получаем:

$$2p_1 = \frac{2\Delta}{R}. \quad (1)$$

Таким образом имеем: периметр ортоцентрического треугольника равен удвоенной площади данного, разделенной на радиус описанного круга.



Фиг. 2.

Перейдем теперь к любому не ортоцентрическому треугольнику, вписанному в данный остроугольный треугольник ABC . Ясно, что по крайней мере одна из сторон такого треугольника не перпендикулярна к радиусу описанного около ABC круга, идущему в соответствующую вершину треугольника ABC . Это ясно на Фиг. 2: если стороны треугольника $D_1E_1F_1$ или треугольника $D_2E_2F_2$ все три параллельны сторонам ортоцентрического треугольника DEF , то одна из вершин, E_1 или E_2 , должна лежать или вне, или внутри треугольника ABC .

Итак, у всякого не ортоцентрического треугольника, вписанного в данный остроугольный, по крайней мере одна из сторон не параллельна соответствующей стороне ортоцентрического треугольника, а следовательно, и не перпендикулярна к соответствующему радиусу описанного круга.

Пусть теперь $\triangle MNP$ (фиг. 3) есть не ортоцентрический вписанный в данный остроугольный $\triangle ABC$ и пусть его сторона MN не перпендикулярна к радиусу OC описанного круга.

Тогда попрежнему имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } ABC &= \text{пл. } ONAP + \\ &+ \text{пл. } OPBM + \text{пл. } OMCN. \end{aligned}$$

Так как MN не перпендикулярна к OC , то сумма высот треугольников OMC и OCN , если их общую сторону OC принять за основание, меньше отрезка MN . Поэтому

пл. $OMCN < \frac{MN \cdot R}{2}$. Что касается площадей $ONAP$ и $OPBM$, то они могут быть или также соответственно меньше $\frac{NP \cdot R}{2}$ и $\frac{PM \cdot R}{2}$,

или равны этим выражениям. Во всяком случае из предыдущего имеем:

$$\Delta < \frac{NP \cdot R}{2} + \frac{PM \cdot R}{2} + \frac{MN \cdot R}{2},$$

или

$$2\Delta < 2p_2 R,$$

где $2p_2 = NP + PM + MN$. Отсюда получаем:

$$2p_2 > \frac{2\Delta}{R}.$$

Это неравенство, если его сравнить с равенством (1), дает

$$2p_2 > 2p_1,$$

т. е. периметр ортоцентрического к $\triangle ABC$ треугольника меньше периметра всякого другого вписанного в $\triangle ABC$ треугольника.

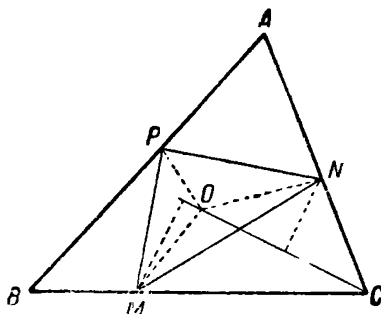
Перейдем теперь к другим выражениям для периметра ортоцентрического треугольника. Можно было бы их получить из равенства (1), но, думается, интереснее воспользоваться иным методом.

Из полученных нами ранее равенств $\angle FAK = \angle DAC$, $\angle FAH = \angle KAC$ (фиг. 1) и из того, что $OA \perp EF$, следует, что $\triangle AKF \sim \triangle ADC$ и $\triangle AKE \sim \triangle AD\beta$. Отсюда имеем:

$$\frac{FK}{DC} = \frac{AF}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{KE}{BD} = \frac{AE}{AB}.$$

Следовательно,

$$FE = \frac{AF \cdot DC}{AC} + \frac{AE \cdot BD}{AB}.$$



Фиг. 3.

Четырехугольники $AFDC$ и $AEDB$ — вписываемые; поэтому к ним применима теорема Птолемея, и мы имеем:

$$AF \cdot DC = AD \cdot CF - AC \cdot FD,$$

$$AE \cdot BD = AD \cdot BE - AB \cdot DE.$$

Подставив это в предыдущее равенство, получим:

$$FE = \frac{AD \cdot CF}{AC} - FD + \frac{AD \cdot BE}{AB} - DE.$$

Отсюда, полагая $AD = h_1$, $BE = h_2$ и $CF = h_3$, получаем:

$$2p_1 = \frac{h_1 h_3}{b} + \frac{h_1 h_2}{c}. \quad (2)$$

Если числитель и знаменатель первой дроби умножим на h_2 , а второй дроби на h_3 , то, так как $bh_2 = ch_3 = 2\Delta$, получим:

$$2p_1 = \frac{h_1 h_2 h_3}{\Delta}. \quad (3)$$

Из равенства (2) еще получим:

$$2p_1 = \frac{h_1 h_3 c + h_1 h_2 b}{bc} = \frac{h_1 \cdot 4\Delta}{bc} = \frac{4\Delta h_1 \sin A}{2\Delta} = 2h_1 \sin A$$

(так как $bc \sin A = 2\Delta$). Аналогично имеем:

$$2p_1 = 2h_1 \sin A = 2h_2 \sin B = 2h_3 \sin C. \quad (4)$$

Из равенства (1) имеем:

$$2\Delta = 2p_1 R.$$

Пусть $2p$ есть периметр треугольника ABC и r — радиус круга, вписанного в треугольник ABC . Тогда

$$2\Delta = 2pr.$$

Сопоставляя эти равенства, имеем:

$$\frac{2p_1}{2p} = \frac{r}{R},$$

т. е. отношение периметров ортоцентрического и данного треугольников равно отношению радиусов кругов: вписанного в данный треугольник и описанного около него.

Мы выше получили $\angle AEK = \angle B$; также $\angle DEC = \angle B$. Следовательно, $\angle DEF = \pi - 2B$; также $\angle FDE = \pi - 2A$ и $\angle DFE = \pi - 2C$.

Известно, что основания высот D , E и F расположены на круге девяти точек, радиус которого равен $\frac{R}{2}$ ¹⁾.

¹⁾ См., например, Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии, задача № 88. (Прим. ред.)

Поэтому

$$\frac{EF}{\sin FDE} = \frac{FD}{\sin DEF} = \frac{DE}{\sin EFD} = R,$$

или

$$\frac{a_1}{\sin 2A} = \frac{b_1}{\sin 2B} = \frac{c_1}{\sin 2C} = R. \quad (5)$$

Отсюда получим:

$$2p_1 = a_1 + b_1 + c_1 = R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Для основного треугольника ABC имеем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Сопоставляя это с (5), легко получим:

$$a_1 = a \cos A; \quad b_1 = b \cos B; \quad c_1 = c \cos C,$$

и отсюда

$$2p_1 = a \cos A + b \cos B + c \cos C.$$

Если угол A стремится, увеличиваясь, к прямому углу, то в пределе получаем: $\angle A = \frac{\pi}{2}$,

$\cos A = 0$, $a_1 = 0$ и $2p_1 = b \cos B + c \cos C$ или $2p_1 = 2h_1$, так как, как то видно на фиг. 4, $h_1 = b \cos B = c \cos C$. Впрочем, это ясно и непосредственно: в этом случае точки E и F сливаются с точкою A и периметр ортоцентрического треугольника делается равным удвоенной высоте, опущенной из вершины прямого угла.

Замечу в заключение, что попытка видоизменить постановку вопроса о вписанном треугольнике с минимальным периметром так, чтобы возможно было применить его и к тупоугольному треугольнику, не увенчалась успехом. Даю один небезынтересный результат.

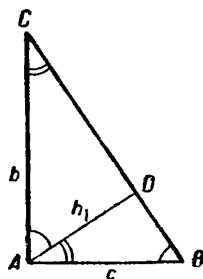
Пусть угол A в треугольнике ABC — тупой (фиг. 5) и точка O — центр описанного круга. Построим ортоцентрический треугольник DEF и прямые OD , OE и OF . Тогда увидим:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } OFBDO + \text{пл. } ODCEO - \text{пл. } OFAEO.$$

(Здесь, при обходе каждой площади согласно порядку букв, рассматриваемая площадь остается слева и считается положительной; можно предыдущее равенство записать и так:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } OFBDO + \text{пл. } ODCEO + \text{пл. } OEAFO;$$

здесь площадь $OEAFO$ при обходе ее в порядке букв остается справа, и ее надо считать отрицательной.



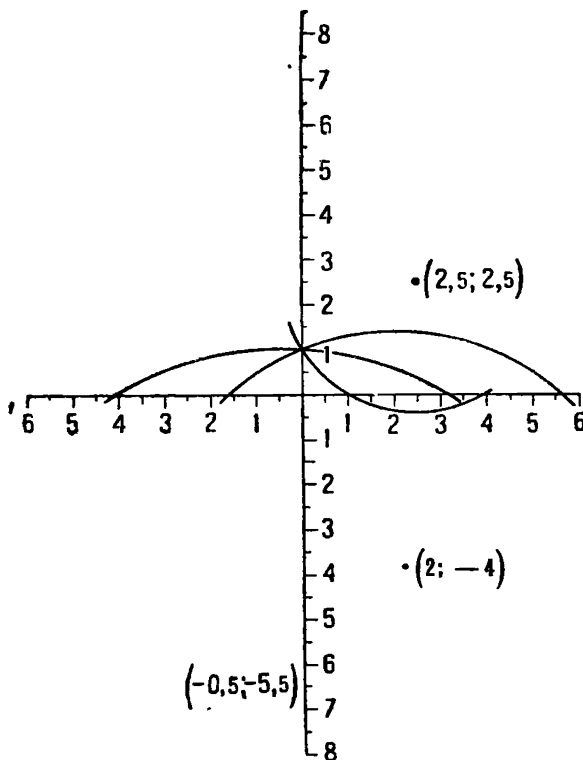
Фиг. 4.

номограмму для решения квадратного уравнения, если рассматривать квадратное уравнение вида

$$x^2 - px + q = 0$$

как результат совместного решения уравнения окружности

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \quad (2)$$



Фиг. 1.

и уравнения оси OX , т. е.

$$y = 0. \quad (3)$$

В самом деле, сделаем в уравнении $x^2 - px + q = 0$ последовательно следующие преобразования:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q = \frac{p^2}{4},$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{4} + \frac{q}{2} + \frac{1}{4} = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} - \frac{q}{2} + \frac{1}{4},$$

далее

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\right)^2,$$

или

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)^2,$$

и окончательно

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2. \quad (4)$$

Левая часть уравнения (4) есть результат подстановки в левую часть уравнения окружности (2) значения y из уравнения (3); правая часть есть квадрат расстояния между двумя точками $A\left(\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2}\right)$ и $B(0; 1)$.

Уравнение (3) является результатом совместного решения уравнения окружности с центром в точке $\left(-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2}\right)$ и радиусом, равным расстоянию между точками A и B , и уравнения $y=0$. Следовательно, значения x , получаемые из уравнения (3), — абсциссы точек пересечения указанной окружности с осью OX .

Из сказанного очевидно, что номограммой для решения квадратного уравнения может служить обыкновенная декартова сетка. Достаточно поставить ножку циркуля в точку $\left(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$, если уравнение имеет вид $x^2 - px + q = 0$, и радиусом от этой точки до точки $(0; 1)$ сделать на оси OX две засечки. Пометки точек, через которые пройдут засечки, и будут корнями данного квадратного уравнения.

На чертеже (фиг. 1) даны решения уравнений: $x^2 - 5x + 4 = 0$ [центр окружности $(2,5; 2,5)$; окружность пересекает ось OX в точках с пометками 4 и 1]; $x^2 + x - 12 = 0$ [центр окружности $(-0,5; -5,5)$; окружность пересекает ось OX в точках с пометками -4 и 3]; $x^2 - 4x - 9 = 0$ [центр окружности $(2; -4)$; окружность пересекает ось OX в точках с пометками 5,6 и -1,6].

КВАДРАТ Эйлера

А. Я. Граусман (Москва)

Среди обширного математического наследства, оставленного Леонардом Эйлером, имеются задачи, поставленные и решенные великим математиком, но сообщенные им без указания на методы, при помощи которых были найдены их формулировки и решения. К числу их принадлежит следующая задача.

В каждую из 16 ячеек представленного на фиг. 1 квадрата требуется поставить различные целые числа A, B, C, D и т. д., удовлетворяющие следующим условиям:

1. Сумма квадратов чисел, взятых по любой горизонтальной или любой вертикальной строчке, а также по диагоналям квадрата, составляет одно и то же число (условие равенства сумм квадратов).

2. Если взять любую пару горизонтальных строк или любую пару вертикальных, то сумма произведений чисел одной строчки на соответствующие числа другой (например $AI + BK + CL + DM$ или $BC + FG + KL + OP$) равняется нулю (условие ортогональности).

Несомненно, обладая общим решением этой задачи, Эйлер нигде в своих трудах его не дал и ограничился лишь сообщением одного частного решения в виде следующего квадрата:

$$\begin{array}{rrrr} +68 & -29 & +41 & -37 \\ -17 & +31 & +79 & +32 \\ +59 & +28 & -23 & +61 \\ -11 & -77 & +8 & +49 \end{array}$$

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

Фиг. 1.

Лежандр в своей „Теории чисел“ считает эту задачу настолько трудной, что все надежды на ее разрешение возлагает на возможность найти какие-либо указания в неопубликованных бумагах Эйлера. В наше время решение задачи Эйлера дал Адольф Гурвиц, посвятив ей заключительную (12-ю) лекцию по теории кватернионов¹⁾.

Решение, данное Гурвицем, сложно и не совсем полно. Кроме того, базируясь на теории кватернионов, оно не может претендовать на идентичность с методом, которым мог оперировать Эйлер.

Вместе с тем несомненно, что эйлерово решение должно находиться в связи с его знаменитым тождеством

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = & (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + \\ & + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)^2 + (a_1b_3 + a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)^2 + \\ & + (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1)^2. \end{aligned}$$

Приступая к изложению весьма простого метода, с помощью которого легко решается задача Эйлера, покажем прежде всего, как на основе элементарных геометрических представлений может быть получено указанное тождество.

Пусть некоторое число

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

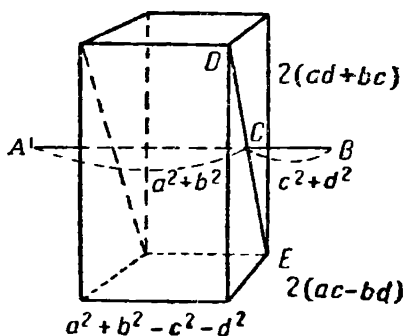
Вообразим сферу с диаметром p и проведем перпендикулярно диаметру (AB на фиг. 2) секущую плоскость через точку C , делящую AB на части

$$AC = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad BC = c^2 + d^2.$$

¹⁾ Adolf Hurwitz, Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Berlin 1919.

Плоскость рассекает сферу по кругу, диаметр которого

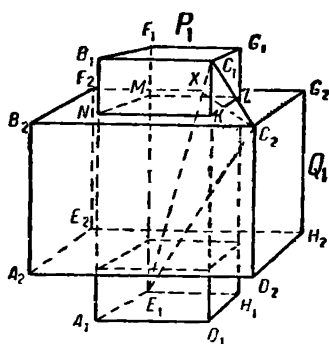
$$ED = 2 \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{[2(ac \mp bd)]^2 + [2(ad \pm bc)]^2}.$$



Фиг. 2.

$$\left. \begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2) n \\ 2(a_1 a_3 - a_2 a_4) n \\ 2(a_1 a_4 + a_2 a_3) n \end{aligned} \right\} \text{ для } P_1; \quad \left. \begin{aligned} (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2) m \\ 2(b_1 b_3 - b_2 b_4) m \\ 2(b_1 b_4 + b_2 b_3) m \end{aligned} \right\} \text{ для } Q_1;$$

и грани соответственно параллельны.



Фиг. 3.

Таким образом в сферу диаметра p могут быть вписаны целочисленные прямоугольные параллелепипеды с ребрами

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2; 2(ac \mp bd); 2(ad \pm bc).$$

Пусть теперь $m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ и $n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$.

Вообразим сферу с диаметром mn и впишем в нее параллелепипеды P_1 и Q_1 (фиг. 3), у которых ребра соответственно равны:

Можно показать, что при этом всякое сечение какой-либо диагонали одного из параллелепипедов (например P_1) плоскостью, перпендикулярной к этой диагонали и проходящей через какую-либо вершину другого параллелепипеда, делит взятую диагональ на две части, представляющие собою сумму двух квадратов, входящих в правую часть эйлера тождества.

Так, например, перпендикуляр C_2X , опущенный из вершины C_2 параллелепипеда Q_1 на диагональ C_1E_1 параллелепипеда P_1 , делит эту последнюю в точке пересечения X на части ¹⁾:

$$C_1X = (a_1 b_3 + a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2)^2 + (a_1 b_4 - a_2 b_3 + a_3 b_2 - a_4 b_1)^2, \\ EX = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3)^2.$$

¹⁾ Чтобы получить, например, первую из нижеследующих формул, достаточно заметить, что C_1C_2 есть диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого служат попарности ребер двух ранее построенных параллелепипедов. Следовательно,

$$4C_1C_2^2 = [(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2) n - (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2) m]^2 + 4[(a_1 a_3 - a_2 a_4) n - (b_1 b_3 - b_2 b_4) m]^2 + 4[(a_1 a_4 + a_2 a_3) n - (b_1 b_4 + b_2 b_3) m]^2.$$

Внеся это выражение в равенство $C_1X = \frac{C_1C_2^2}{mn}$, после надлежащих преобразований получим искомое равенство. (Прим. ред.)

Такова простая геометрическая интерпретация эйлерова тождества.

Что касается искомого квадрата, то нетрудно показать, что отдельные его строчки также представляют собою сечения какой-либо диагонали одного из параллелепипедов, типа P и Q , перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через вершины другого параллелепипеда.

Действительно, возьмем какую-либо диагональ параллелепипеда P , (например C_1E_1).

Сечение этой диагонали перпендикулярной плоскостью, проходящей через вершину C_2 параллелепипеда Q , дает разложение произведения mn на сумму квадратов чисел:

$$\begin{aligned} & \pm (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4), \pm (a_1b_3 + a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2), \\ & \pm (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1), \pm (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3). \end{aligned}$$

Аналогичное сечение той же диагонали плоскостью, проходящей через вершину F_2 , приводит к разложению произведения mn на сумму квадратов чисел:

$$\begin{aligned} & \pm (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4), \pm (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2), \\ & \pm (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1), \pm (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3). \end{aligned}$$

Возьмем в качестве одной из горизонтальных строк искомого квадрата числа первого разложения, не уточняя пока их расположения и знаков. Члены второго разложения дадут следующую горизонтальную строку квадрата. Далее берем сечения диагонали C_1E_1 плоскостями, проходящими через остальные вершины B_2 и G_2 параллелепипеда Q , и аналогичным путем получаем третью и четвертую горизонтальные строки искомого квадрата. В результате получаем следующий квадрат:

$$\begin{aligned} & \pm(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4), \pm(a_1b_3+a_2b_4-a_3b_1-a_4b_2), \pm(a_1b_4-a_2b_3+a_3b_2-a_4b_1), \pm(a_1b_2-a_2b_1-a_3b_4+a_4b_3), \\ & \pm(a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4), \pm(a_1b_3+a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2), \pm(a_1b_4-a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1), \pm(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3), \\ & \pm(a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4), \pm(a_1b_3-a_2b_4-a_3b_1+a_4b_2), \pm(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1), \pm(a_1b_2+a_2b_1-a_3b_4-a_4b_3), \\ & \pm(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_4b_4), \pm(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1-a_4b_2), \pm(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_1), \pm(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4+a_4b_3), \end{aligned}$$

в котором горизонтальные строки удовлетворяют условиям задачи.

Переставляя числа по горизонталям, можно добиться того, чтобы и вертикальные строчки удовлетворяли условиям задачи; для этого нужно выполнить перестановку так, чтобы числа по вертикалям представляли собой также сечения диагонали некоторого параллелепипеда P , со сторонами:

$$(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2) n, \quad 2(a_1a_4 - a_2a_3) n, \quad 2(a_1a_4 + a_2a_3) n,$$

плоскостями, перпендикулярными к этой диагонали и проходящими через вершины параллелепипеда Q , со сторонами:

$$(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2) m, \quad 2(b_1b_4 - b_2b_3) m, \quad 2(b_1b_4 + b_2b_3) m.$$

Получаем такой квадрат:

$$\begin{aligned} & \pm(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4), \pm(a_1b_3+a_2b_4-a_3b_1-a_4b_2), \pm(a_1b_4-a_2b_3+a_3b_2-a_4b_1), \pm(a_1b_2-a_2b_1-a_3b_4+a_4b_3), \\ & \pm(a_1b_3-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_2), \pm(a_1b_4-a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1), \pm(a_1b_3+a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2), \pm(a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4), \\ & \pm(a_1b_3-a_2b_4-a_3b_1+a_4b_2), \pm(a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4), \pm(a_1b_2-a_2b_1-a_3b_4-a_4b_3), \pm(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1), \\ & \pm(a_1b_4-a_2b_3-a_3b_2-a_4b_1), \pm(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3+a_4b_4), \pm(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_4b_4), \pm(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1-a_4b_2). \end{aligned}$$

Нетрудно выбрать знаки так, чтобы удовлетворялись условия ортогональности. Получим квадрат:

$$\begin{aligned} & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4, \quad -a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2, \quad -a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1, \quad -a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3, \\ & a_1b_3-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_2, \quad -a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2-a_4b_1, \quad a_1b_3+a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2, \quad a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4, \\ & a_1b_3-a_2b_4-a_3b_1+a_4b_2, \quad a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4, \quad -a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4+a_4b_3, \quad a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1, \\ & -a_1b_4-a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1, \quad -a_1b_2-a_2b_1-a_3b_3-a_4b_4, \quad -a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4, \quad a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1-a_4b_2. \end{aligned}$$

Полученный квадрат удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условий, касающихся свойств чисел, расположенных по диагоналям

Чтобы выполнялись также и условия по диагоналям, необходимо на числа a_i , b_i наложить некоторые ограничения. Из условий равенства сумм квадратов чисел, расположенных по диагоналям, произведению

$$mn = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2),$$

получаем:

$$(a_1a_3 - a_2a_4)(b_1b_3 - b_2b_4) = 0,$$

$$(a_1a_2 - a_3a_4)(b_1b_2 - b_3b_4) + (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) = 0.$$

Итак, если числа a_i и b_i будут удовлетворять этим двум условиям, то получаемый квадрат будет удовлетворять всем условиям задачи

В частности при

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3;$$

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 0$$

получаем приведенный в начале статьи квадрат Эйлера.

¹⁾ Эти числа нетрудно получить: для этого достаточно в предыдущем квадрате индексы 3 и 4 у всех букв заменить соответственно на 4 и 3. Для того чтобы уяснить себе, почему приходится поступать так, достаточно сравнить длину ребер параллелепипедов P_2 и Q_2 с длиной ребер параллелепипедов P_1 и Q_1 .

(Прим. ред.)

О ПРИВОДИМОСТИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВИДА

$$\sum_{i=1}^n x_i^k + mx_1x_2 \dots x_n$$

В. А. Скрылев (Сумы)

Известно, что целые рациональные функции

$$x^2 + y^2 \pm 2xy \quad \text{и} \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

приводимы в поле рациональных чисел, т. е. каждую из них можно представить в виде произведения двух других целых рациональных функций с рациональными коэффициентами. В самом деле,

$$x^2 + y^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$$

и, как легко убедиться, хотя бы путем непосредственного деления на $x + y + z$,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Эти функции являются частными случаями функции

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n + nx_1x_2 \dots x_n,$$

или более общей функцией

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k + mx_1x_2 \dots x_n,$$

где коэффициент m — число целое.

Докажем, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$, за исключением только что упомянутых случаев, в поле рациональных чисел неприводима.

С этой целью предположим, что вопреки утверждению

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \cdot \psi(x_1, \dots, x_n),$$

где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — целые рациональные функции с рациональными коэффициентами. Полагая в этом тождестве

$$x_4 = x_5 = \dots = x_n = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = x_3 = 1,$$

будем иметь

$$x_1^k + 2 = \varphi(x_1, 1, 1, 0, \dots, 0) \cdot \psi(x_1, 1, 1, 0, \dots, 0).$$

Полученное тождество неверно, так как функция вида $x^k - a$ в поле рациональных чисел неприводима, если a не является

k -й степенью какого-нибудь рационального числа ¹⁾. Следовательно, высказанное сейчас утверждение справедливо по крайней мере для $n > 3$ и для каких угодно m и k .

В частности тем же приемом, полагая $x_2 = x_3 = 1$, покажем, что в поле рациональных чисел неприводима и функция

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k.$$

Таким образом для окончательного доказательства нашего утверждения остается исследовать функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^k + x_2^k + x_3^k + mx_1x_2x_3$$

и

$$f(x_1, x_2) = x_1^k + x_2^k + mx_1x_2,$$

при $m \neq 0$ ²⁾.

Пусть

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + mx_1x_2x_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi(x_1, x_2, x_3).$$

Применив к этому тождеству подстановку

$$x_1 = tx, \quad x_2 = ty, \quad x_3 = tz,$$

получим новое тождество:

$$t^k [(x^k + y^k + z^k) t^{k-3} + mxyz] = \varphi(tx, ty, tz) \cdot \psi(tx, ty, tz), \quad (1)$$

если $k > 3$ и

$$t^k [(x^k + y^k + z^k) + mxyz t^{3-k}] = \varphi(tx, ty, tz) \cdot \psi(tx, ty, tz), \quad (2)$$

если $k < 3$. После сокращения обеих частей первого равенства на t^3 , а второго на t^k будем соответственно иметь:

$$(x^k + y^k + z^k) t^{k-3} + mxyz = \varphi_1(x, y, z, t) \cdot \psi_1(x, y, z, t), \quad (1')$$

$$(x^k + y^k + z^k) + mxyz t^{3-k} = \varphi_1(x, y, z, t) \cdot \psi_1(x, y, z, t), \quad (2')$$

где

$$\varphi_1(x, y, z, t) = t^{-\alpha} \varphi(tx, ty, tz), \quad (1'')$$

$$\psi_1(x, y, z, t) = t^{-\beta} \psi(tx, ty, tz), \quad (2'')$$

причем $\alpha + \beta = 3$, если $k > 3$ и $\alpha + \beta = k$, если $k < 3$. Так как функции

$$x^k + y^k + z^k \quad \text{и} \quad xyz$$

взаимно простые, то множители $\varphi_1(x, y, z, t)$ и $\psi_1(x, y, z, t)$ в тождествах (1') и (2') зависят не только от x, y, z , но и от t , исключая тот случай, когда $k = 3$. При этом значении k

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + mx_1x_2x_3$$

¹⁾ См., например, Н. Вебер, *Lehrbuch der Algebra*, т. I, стр. 656—657.

²⁾ При $m = 0$ $f(x_1, x_2)$ приводится к функции $x_1^k + x_2^k$, условия приводимости которой хорошо известны. Поэтому мы исключаем случай $m = 0$ и для $f(x_1, x_2)$.

а левые части равенств (1') и (2') приводятся к функции

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz,$$

не зависящей от t , почему не будут зависеть от t в этом случае и функции φ_1 и ψ_1 .

В основу исследования $f(x_1, x_2, x_3)$ при $k \neq 3$ положим следующие соображения. Если $f(x_1, x_2, x_3)$ при каком-нибудь $k \neq 3$ будет приводимой, то таковой при этом значении k должна быть одна из функций

$$(x^k + y^k + z^k) t^{k-3} + mxyz \text{ или } x^k + y^k + z^k + mxyz t^{3-k}, \quad (3)$$

именно та, которая окажется целой рациональной относительно t . Значит, если мы докажем, что последние функции при $k \neq 3$ неприводимы в поле рациональных чисел, то тем самым мы докажем неприводимость при $k \neq 3$ и функции $f(x_1, x_2, x_3)$. Чтобы доказать, что функции (3) неприводимы при $k \neq 3$, достаточно для каждой из них подобрать такие рациональные значения для x, y, z , при которых они обращаются в функции одной зависимой переменной t , неприводимые в поле рациональных чисел.

Имея это в виду, в функции

$$(x^k + y^k + z^k) t^{k-3} + mxyz \quad (A)$$

полагаем $x = y = z = t$. В результате получим:

$$3m^k t^{k-3} + m^4 = 3m^k \left(t^{k-3} + \frac{1}{3m^{k-4}} \right). \quad (4)$$

При $k = 4$ эта функция обращается в линейную

$$m^4 (3t + 1),$$

которая, как известно, неприводима в любом поле. Не будет приводимой функция (4) в поле рациональных чисел и при $k > 4$, если только $m \neq \pm 3$, так, в этом случае

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{m^{k-4}}$$

не будет $(k-3)$ -й степенью рационального числа. При $m = \pm 3$ функция (A) приводится к

$$(x^k + y^k + z^k) t^{k-3} \pm 3xyz.$$

Полагая здесь $x = y = 2$ и $z = 1$, получим функцию

$$(2^{k+1} + 1) t^{k-3} \pm 3 \cdot 2^2 = (2^{k+1} + 1) \left[t^{k-3} \pm 3 \cdot \frac{2^2}{2^{k+1} + 1} \right]. \quad (5)$$

Число

$$\sqrt[k-3]{\pm 3 \cdot \frac{2^2}{2^{k+1} + 1}}$$

ни при каком значении $k > 4$ полю рациональных чисел не принадлежит, ввиду этого функция (5) в этом поле будет неприводимой.

Обращаясь к функции

$$x^k + y^k + z^k + mxyz t^{3-k}, \quad (6)$$

полагаем в ней $x = y = z = t$. Полученная в результате функция

$$3m^k + m^4 t^{3-k}$$

при $k=2$ и $k=1$ приводится соответственно к

$$3m^2 + mt \quad \text{и} \quad 3m + m^4 t^2.$$

Первая функция, как линейная относительно t , будет неприводимой при любом значении m ; вторая будет неприводимой при всех значениях $m \neq -3$. Но при $m = -3$ и $k=1$ функция (6) имеет вид:

$$x + y + z - 3xyz t^2.$$

Полагая здесь $x = y = 2$ и $z = 1$, получим неприводимую в поле рациональных чисел функцию

$$5 - 12t^2.$$

Из всего этого на основании соображений, положенных в основу наших исследований, следует, что $f(x_1, x_2, x_3)$ при $k \neq 3$ неприводима при любом значении m .

Что касается $k=3$, то при этом условии

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + mx_1 x_2 x_3$$

будет однородной функцией третьего измерения. Если она приводима, то один из ее множителей должен быть функцией первой степени, именно $x_1 + x_2 + x_3$, а второй — однородной функцией второго измерения:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Ax_1 x_2 + Bx_2 x_3 + Cx_1 x_3 \quad ^1).$$

Коэффициенты A, B, C найдем, приравняв в равенстве

$$\begin{aligned} & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + mx_1 x_2 x_3 = \\ & = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Ax_1 x_2 + Bx_2 x_3 + Cx_1 x_3) \end{aligned}$$

коэффициенты правой части соответствующим коэффициентам левой. Сделав это, найдем:

$$A = B = C = -1, \quad m = -3.$$

¹⁾ По известной теореме Гаусса, если целочисленная функция

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

в поле рациональных чисел разлагается на множители

$$x^\alpha + a_1 x^{\alpha-1} + \dots + a_{\alpha-1} x + a_\alpha \quad \text{и} \quad x^\beta + b_1 x^{\beta-1} + \dots + b_{\beta-1} x + b_\beta,$$

то эти множители также целочисленные функции. Теорема эта распространяется и на целочисленные функции многих независимых переменных.

Следовательно при $k=3$ функция $f(x_1, x_2, x_3)$ будет приводима лишь при $m=-3$, причем, как было уже отмечено в самом начале,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3).$$

Покончив с $f(x_1, x_2, x_3)$, обращаемся к функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^k + x_2^k + mx_1x_2,$$

которую исследуем тем же приемом, что и $f(x_1, x_2, x_3)$. С этой целью, считая $k \neq 2$, преобразуем $f(x_1, x_2)$ с помощью подстановки

$$x_1 = tx, \quad x_2 = ty.$$

В результате получим функцию

$$t^k [(x^k + y^k) t^{k-2} + mxy] \quad (7)$$

или

$$t[(x+y) + mxyt],$$

смотря по тому, k больше или меньше 2. Полагая в функциях

$$(x^k + y^k) t^{k-2} + mxy, \\ (x+y) + mxyt$$

$x=y=t$, получим соответственно:

$$2m^k t^{k-2} + m^3 \quad \text{и} \quad 2m + m^3 t.$$

Вторая из этих функций неприводима в любом поле, а первая будет приводимой в поле рациональных чисел лишь при $m = \pm 2$ и $k > 3$. Но при этих значениях функция (7) приводится к

$$(x^k + y^k) t^{k-2} \pm 2xy.$$

Эта функция при $x=2$, $y=1$ обращается в неприводимую в поле рациональных чисел функцию

$$(2^k + 1) t^{k-2} \pm 2^2.$$

Отсюда следует, что $f(x_1, x_2)$ при $k \neq 2$ неприводима для всех значений m .

Что же касается $k=2$, то в этом случае

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + mx_1x_2.$$

Единственные значения m , при которых эта функция будет приводима, равны ± 2 . Действительно, функция

$$f(x_1, 1) = x_1^2 + mx_1 + 1$$

приводима лишь при этих значениях m .

Итак, действительно, симметрическая функция

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k + mx_1x_2 \dots x_n$$

в поле рациональных чисел будет приводима лишь при

$$k=3, m=3 \text{ и } k=2, m=\pm 2.$$

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ЦЕЛОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В. А. Скрылев (Сумы)

Возьмем целую рациональную функцию

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-3}x^3 + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$$

с действительными коэффициентами, лишенную комплексных корней. Преобразовав ее с помощью подстановки

$$x = \frac{1}{y},$$

получим новую функцию

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = \\ &= A_0 + A_1y + \dots + A_{n-3}y^{n-3} + A_{n-2}y^{n-2} + A_{n-1}y^{n-1} + A_ny^n, \end{aligned}$$

также не имеющую комплексных корней, вследствие чего не имеет комплексных корней и функция

$$\begin{aligned} \varphi^{(n-2)}(y) &= (n-2)(n-3) \dots 4 \cdot 3 \cdot [n(n-1)A_ny^2 + \\ &+ 2(n-1)A_{n-1}y + 2A_{n-2}], \end{aligned}$$

потому что, как известно, если все корни целой рациональной функции действительны, то такими будут и корни всех ее последовательных производных. Приравняв эту функцию к нулю, получим после сокращения на $3 \cdot 4 \dots (n-3)(n-2)$ квадратное уравнение

$$n(n-1)A_ny^2 + 2(n-1)A_{n-1}y + 2A_{n-2} = 0,$$

дискриминант которого

$$\begin{aligned} D &= 4(n-1)^2 A_{n-1}^2 - 8n(n-1)A_{n-2}A_n = \\ &= 4(n-1)^2 \left[A_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} A_{n-2}A_n \right] \end{aligned}$$

больше нуля или равен ему, откуда следует, что

$$A_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} A_{n-2}A_n \geq 0. \quad (1)$$

Таким образом, если корни функции $f(x)$ все действительны, то три последних коэффициента ее, A_{n-2} , A_{n-1} , A_n , удовлетворяют соотношению (1).

Этот признак существования комплексных корней является непосредственным следствием мало популярного в нашей учебной литературе правила Ньютона, впервые доказанного английским математиком Сильвестером ¹⁾ с помощью принадлежащей ему теоремы. Здесь я имел в виду дать этому признаку элементарное доказательство, независимо от теоремы Сильвестера и правила Ньютона.

Доказанный здесь признак позволяет обнаружить присутствие комплексных корней в уравнении нередко в тех случаях, когда не удается этого достигнуть с помощью теоремы Декарта.

В этом читатель может убедиться, например, на уравнении

$$x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Наконец, признак этот полезно иногда применять и там, где теорема Бюдана не дает определенного ответа. Для примера рассмотрим уравнение

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0,$$

все действительные корни которого лежат между -2 и 2 . Так как функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ при $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ имеют соответственно знаки

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + \\ - & + & - & 0 & + \\ + & + & + & + & + \end{array}$$

то согласно теореме Бюдана данное уравнение имеет один корень в интервале $(-2, 0)$ и по крайней мере один корень в интервале $(0, 2)$.

Применяя же наш признак, найдем, что в последнем интервале лежит точно один корень, так как

$$A_2^2 - \frac{8}{3} A_1 A_4 < 0,$$

откуда следует, что все корни рассматриваемого уравнения действительными быть не могут.

Впрочем, на практике обыкновенно применяют не рассматриваемый признак, а выводимый из него следующий более простой признак Де-Гюа: если все корни целой рациональной функции $f(x)$ действительны, то

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_0 A_2 &> 0, \\ A_2^2 - A_1 A_3 &> 0, \\ &\dots \dots \dots \\ A_i^2 - A_{i-1} A_{i+1} &> 0, \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1}^2 - A_{n-2} A_n &> 0. \end{aligned}$$

¹⁾ В русской литературе об этом правиле и теореме Сильвестера упоминается в учебнике Ю. Сохоцкого, Высшая алгебра, и без доказательства у Д. Граве, Элементы высшей алгебры.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\frac{(i+1)(n-i+1)}{i(n-i)} > 1,$$

откуда следует, что при $A_{i-1}A_{i+1} > 0$

$$A_i^2 - A_{i-1}A_{i+1} > A_i^2 - \frac{(i+1)(n-i+1)}{i(n-i)} A_{i-1}A_{i+1}.$$

Когда же $A_{i-1}A_{i+1} \leq 0$, то ясно, что

$$A_i^2 - A_{i-1}A_{i+1} > 0.$$

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Н. Г. Павлов (Рязань)

Требуется найти функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$[f(x)]^2 = f(2x) + c, \quad (1)$$

где c — произвольная постоянная.

Пусть $f(x)$ будет аналитическая функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Найдем значение c , при котором уравнение (1) будет иметь решение. Если $x = 0$, то

$$f(0) = a_0; \quad [f(0)]^2 = f(0) + c; \quad c = a_0^2 - a_0.$$

Пусть

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0;$$

тогда

$$f(x) = a_0 + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots$$

Продифференцируем уравнение (1); будем иметь:

$$f(x) \cdot f'(x) = f'(2x).$$

От последнего выражения возьмем производную $(k-1)$ -го порядка

$$f(x) f^{(k)}(x) + (k-1) f'(x) f^{(k-1)}(x) + \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2} f''(x) f^{(k-2)}(x) + \dots \\ \dots + (k-1) f^{(k-2)}(x) f''(x) + f^{(k-1)}(x) f'(x) = 2^{k-1} f^{(k)}(2x).$$

При $x = 0$

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \dots, \quad f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = a_k k!$$

Тогда

$$f(0) a_k k! = 2^{k-1} a_k k!,$$

откуда

$$f(0) = a_0 = 2^{k-1} \quad \text{и} \quad c = 2^{2k-2} - 2^{k-1}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} & (2^{k-1} + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots)^2 = \\ & = 2^{k-1} + 2^k a_k x^k + 2^{k+1} a_{k+1} x^{k+1} + \dots + 2^{2k-2} - 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты левой и правой частей этого тождества, получаем:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^{k-1} a_k &= 2^k a_k; & a_k &= a_k, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{k+1} &= 2^{k+1} a_{k+1}; & a_{k+1} &= 0, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{k+2} &= 2^{k+2} a_{k+2}; & a_{k+2} &= 0, \\ &\dots & & \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{2k-1} &= 2^{2k-1} a_{2k-1}; & a_{2k-1} &= 0, \\ a_k^2 + 2 \cdot 2^{k-1} a_{2k} &= 2^{2k} a_{2k}; & a_{2k} &\neq 0, \\ &\dots & & \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = a_0 + a_k x^k + a_{2k} x^{2k} + \dots + a_{sk} x^{sk} + \dots$$

и

$$\begin{aligned} & [2^{k-1} + a_k x^k + a_{2k} x^{2k} + \dots + a_{sk} x^{sk} + \dots]^2 = \\ & = 2^{k-1} + 2^k a_k x^k + 2^{2k} a_{2k} x^{2k} + \dots + 2^{sk} a_{sk} x^{sk} + \dots + 2^{2k-2} - 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^{k-1} a_k &= 2^k a_k, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{2k} + a_k^2 &= 2^{2k} a_{2k}, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{3k} + 2 a_{2k} a_k &= 2^{3k} a_{3k}, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{4k} + 2 a_{3k} a_k + a_{2k}^2 &= 2^{4k} a_{4k}, \\ 2 \cdot 2^{k-1} a_{5k} + 2 a_{4k} a_k + 2 a_{3k} a_{2k} &= 2^{5k} a_{5k}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из этих формул все коэффициенты можно выразить через a_k . Для иллюстрации рассмотрим частные случаи:

1) $k=1$; $c=0$, $a_0=1$.

$$2a_2 + a_1^2 = 4a_2; \quad a_2 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{a_1^2}{1 \cdot 2}.$$

$$2a_3 + 2a_2 a_1 = 8a_3; \quad a_3 = \frac{a_2 a_1}{3} = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$$2a_4 + 2a_3 a_1 + a_2^2 = 16a_4; \quad a_4 = \frac{1}{14} \left(\frac{a_1^4}{1 \cdot 3} + \frac{a_1^4}{1 \cdot 4} \right) = \frac{a_1^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Следовательно, при $k = 1$ имеем:

$$f(x) = 1 + a_1x + \frac{a_1^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a_1^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Опуская индекс у буквы a_1 , можно написать:

$$f(x) = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(ax)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = e^{ax}.$$

2) $k = 2$; $c = 2$, $a_0 = 2$.

$$2 \cdot 2a_4 + a_2^2 = 16a_4; \quad a_4 = \frac{a_2^2}{12} = \frac{2a_2^2}{4!}.$$

$$2 \cdot 2a_6 + 2a_4a_2 = 2^6a_6; \quad a_6 = \frac{4}{60} \cdot \frac{a_2^3}{4!} = \frac{2a_2^3}{6!}.$$

$$2 \cdot 2a_8 + 2a_6a_2 + a_4^2 = 2^8a_8; \quad a_8 = \frac{1}{252} \left(\frac{4a_2^4}{6!} + \frac{4a_2^4}{4!} \right) = \frac{2a_2^4}{8!}.$$

.....

Следовательно, при $k = 2$ (опускаем индекс у a_2):

$$f(x) = 2 + \frac{2(ax)^2}{2!} + \frac{2(ax)^4}{4!} + \frac{2(ax)^6}{6!} + \dots = e^{ax} + e^{-ax}.$$

— — — — —

ДВА ПРИМЕРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Узков (Омск)

В этой заметке мы рассмотрим две задачи, при решении которых можно с успехом воспользоваться функциональными уравнениями.

1. Выразить в конечном виде следующее бесконечное произведение: $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} \dots$ (эта задача помещена в „Сборнике задач по высшей математике“ Адамова и др. Она воспроизведена также в выпуске 3 „Математического просвещения“).

Сходимость этого произведения, а также непрерывность представляемой им функции, непосредственно следует из предложений, доказываемых в курсах анализа.

Обозначим эту функцию через $f(x)$. Непосредственно видно, что $f(0) = 1$. Кроме того, рассмотрение структуры произведения сразу дает, что $f(x)$ удовлетворяет условию:

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right). \quad (1)$$

Итак, предложенная задача свелась к следующей:

Найти непрерывную функцию $f(x)$, обращающуюся в единицу при $x=0$ и удовлетворяющую условию (1).

Прежде всего докажем единственность решения последней задачи, что необходимо для окончательного обоснования законности замены прежней постановки вопроса новой.

Действительно, пусть $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, удовлетворяющие условиям последней задачи. Тогда из

$$\psi(x) = \cos \frac{x}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \cos \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

получаем:

$$\varphi(x) : \psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) : \psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

при любом значении x . Отсюда следует:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\psi\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{4}\right)}{\psi\left(\frac{x}{4}\right)} = \dots = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\psi\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\psi\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Но в силу непрерывности функций φ и ψ этот последний предел равен $\frac{\varphi(0)}{\psi(0)} = 1$. Следовательно, $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ при любом значении x , т. е. решение единственно.

Остается найти это единственное решение. Для этого уравнение (1) сравним с известной формулой

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}. \quad (2)$$

Сравнение непосредственно указывает путь преобразования (2) к виду (1). Именно, мы имеем:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Теперь совершенно очевидно, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ удовлетворяет уравнению (1). Она, кроме того, непрерывна и обращается в единицу при $x = 0$. Поэтому

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} \dots$$

2. В качестве второго примера применения того же метода укажем вычисление интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx \quad \text{при} \quad 0 < a < 1.$$

Легко видеть, что рассматриваемый интеграл сходится равномерно относительно a в любом сегменте, заключенном внутри интервала $(0; 1)$. Он имеет также непрерывную производную по a в таком сегменте.

Этот интеграл, как функцию a , обозначим $F(a)$ и попытаемся составить функциональное уравнение, которому эта функция удовлетворяет. Заметим сразу, что $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Воспользуемся для составления уравнения известным соотношением ¹⁾:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{1+x} dx.$$

Из этого соотношения и из равенства

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx$$

получаем:

$$F(a) + \frac{\pi}{\sin a\pi} = 2 \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a+1}}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{u^{\frac{a}{2}-1} - u^{-\frac{a}{2}}}{1-u} du = F\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$F(a) - \frac{\pi}{\sin a\pi} = 2 \int_0^1 \frac{x^a - x^{-a}}{1-x^2} dx = F\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Полагая здесь $F(a) = \pi f(\pi a)$ и заменяя πa через z , получим два функциональных уравнения, которым удовлетворяет функция $f(z)$:

$$f(z) + \frac{1}{\sin z} = f\left(\frac{z}{2}\right), \quad (3)$$

$$f(z) - \frac{1}{\sin z} = f\left(\frac{z+\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Единственность функции, удовлетворяющей этим условиям и такой, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, доказывается подобно тому, как это было сделано в предыдущем примере. Что же касается решения, то оно непосредственно открывается путем сравнения с формулой

$$\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = \frac{1 + \cos z}{\sin z} = \frac{1}{\sin z} + \operatorname{ctg} z.$$

Последняя показывает, что функция $f(z) = \operatorname{ctg} z$ удовлетворяет уравнению (3). Проверка показывает, что она удовлетворяет и уравнению (4). Кроме того, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Поэтому

$$F(a) = \pi f(\pi a) = \pi \operatorname{ctg} \pi a$$

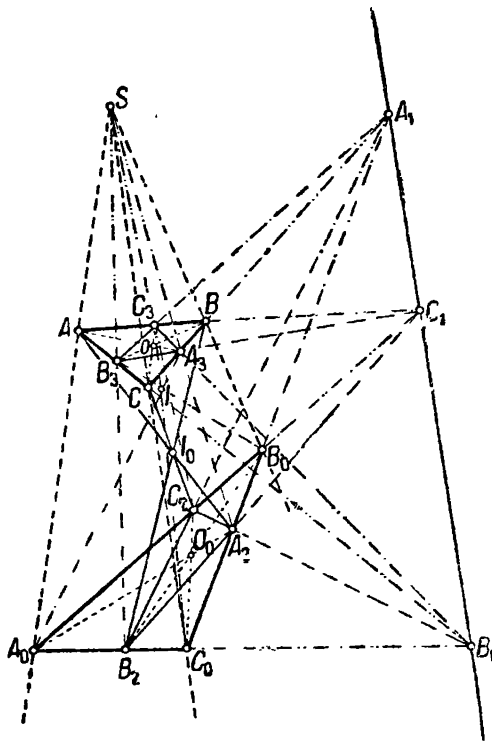
будет решением поставленной задачи.

¹⁾ См., например, В а л л е - П у с с е н, Курс анализа, т. II, ГТТИ, 1933, стр. 174

НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Э. К. Хилькевич (Тюмень)

1. Если для точек A_1B_1 и C_1 , в которых пересекаются попарно соответственные стороны перспективных треугольников $A_0B_0C_0$ и ABC , найдены точки A_2, B_2 и C_2 на сторонах треугольника $A_0B_0C_0$ так, что пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 гармонически



Фиг. 1.

разделяют пары B_0 и C_0, A_0 и C_0, A_0 и B_0 соответственно, то прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (фиг. 1).

Доказательство. Соединив попарно точки A_2, B_2 и C_2 , получим треугольник $A_2B_2C_2$. Мы докажем пересекаемость прямых AA_2, BB_2 и CC_2 в одной точке, если докажем, что соответственные стороны треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

Проведем прямые A_0A_2, B_0B_2 и C_0C_2 . Как известно, они пересекаются в одной точке (это следует хотя бы из того, что при перспективном преобразовании треугольника $A_0B_0C_0$ вместе с прямой A_1B_1 , произведенном так, чтобы прямая A_1B_1 обрати-

лась в бесконечно удаленную прямую, прямые A_0A_2 , B_0B_2 и C_0C_2 будут преобразованы в медианы нового треугольника. Из пересеканости в одной точке этих медиан будет следовать пересеканость прямых A_0A_2 , B_0B_2 и C_0C_2 также в одной точке). Рассмотрим полный четырехугольник $A_2B_0C_2O_0$, где O_0 есть точка пересечения прямых A_0A_2 и C_0C_2 . Допустим, что сторона A_2C_2 этого четырехугольника встречает диагональ A_0C_0 в точке B_1^0 . По свойству полного четырехугольника, точка B_1^0 будет сопряженной с B_2 точкой гармонического деления пары точек A_0 и C_0 . Но по условию такой точкой является B_1 . Следовательно, B_1^0 и B_1 совпадают. Итак, прямая A_2C_2 проходит через точку B_1 .

Аналогично обнаружим, что прямые A_1B_2 и E_2C_2 проходят через точки C_1 и A_1 . Но через те же три точки A_1 , B_1 и C_1 , лежащие на одной прямой, проходят стороны треугольника ABC . Тем самым доказана пересеканость прямых AA_2 , BB_2 и CC_2 в одной точке.

2. Прямые A_0A_3 , B_0B_3 и C_0C_3 пересекаются в одной точке.

Подобно этому мы докажем пересечение в одной точке трех прямых A_0A_3 , B_0B_3 и C_0C_3 , если точки A_3 , B_3 и C_3 принадлежат соответственно гармоническим группам (CBA_3A_1) , (ACB_3B_1) и $(A^1C_3C_1)$.

3. Прямые A_2A_3 , B_2B_3 и C_2C_3 пересекаются в центре перспективы данных треугольников.

Проведем луч SA_3 и рассмотрим четверку лучей SC , SA_3 , SB и SA_1 . В этой четверке лучи SA_3 и SA_1 гармонически разделяют пару лучей SC и SB , так как ряд точек (CBA_3A_1) есть гармонический ряд. Но так как ряд $(C_0B_0A_2B_1)$ есть тоже гармонический ряд, то луч SA_3 пройдет через точку A_2 . Иначе говоря, прямая A_2A_3 пройдет через точку S . Так же докажем, что и прямые B_2B_3 и C_2C_3 пройдут через точку S .

4. Прямая I_0O проходит через центр перспективы S .

Действительно, рассмотрим треугольники AA_2A_3 и BB_2B_3 . Их вершины попарно лежат на трех прямых, пересекающихся в одной точке C_1 , именно:

$$\begin{array}{llll}
 A \text{ и } B & \text{лежат на прямой} & AC_1, \\
 A_2 \text{ и } B_2 & \text{" " " " " } & B_2C_1, \\
 A_3 \text{ и } B_3 & \text{" " " " " } & B_3C_1.
 \end{array}$$

Поэтому три точки I_0 , O и S , в которых попарно пересекаются их соответственные стороны (AA_2 и BB_2 , AA_3 и BB_3 , A_2A_3 и B_2B_3), расположены на одной прямой.

5. Прямая I_0O_0 проходит через центр перспективы S .

Это следует из рассмотрения треугольников BB_2B_0 и AA_2A_0 . Их вершины лежат:

$$\begin{array}{llll}
 A \text{ и } B & \text{на прямой} & AC_1, \\
 A_0 \text{ и } B_0 & \text{" " " " " } & A_2C_1, \\
 A_2 \text{ и } B_2 & \text{" " " " " } & B_2C_1.
 \end{array}$$

Так как прямые AC_1 , A_0C_1 и B_2C_1 пересекаются в одной точке C_1 , то соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трех точках, I_0 , O_0 и S , лежащих на одной прямой.

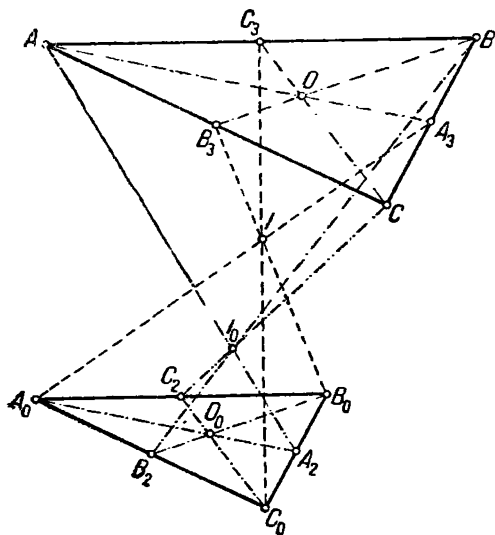
6. Прямая IO проходит через S .

Это доказывается подобно предыдущему.

7. Четыре точки O , O_0 , I и I_0 лежат на одной прямой, проходящей через центр перспективы.

Это есть следствие пунктов 4, 5 и 6.

Свойство гомотетичных треугольников. В случае, когда ось перспективы есть бесконечно удаленная прямая, треугольники $A_0B_0C_0$



Фиг. 2.

и ABC становятся гомотетичными, а так как точки A_2 , B_2 и C_2 в этом случае обращаются в середины сторон треугольника $A_0B_0C_0$, то имеет место следующее свойство гомотетичных треугольников: Если каждую вершину одного из двух гомотетичных треугольников соединить с серединой той стороны второго треугольника, которая лежит против вершины второго треугольника, являющейся сходственной с выбранной вершиной первого треугольника, то проведенные таким образом три прямые пересекаются в одной точке (фиг. 2).

Следствие 1. Если, оставляя ось перспективы бесконечно удаленною, переместить центр перспективы в бесконечно удаленную точку, то гомотетия треугольников обратится в их равенство. Будем смещать треугольник ABC по направлению лучей AA_0 , BB_0 и CC_0 так, чтобы он, в конце концов, мог быть совмещен с треугольником $A_0B_0C_0$. Прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 при совмещении треугольников обратятся в медианы треугольника $A_0B_0C_0$. Таким образом оказывается, что доказанное предложение ближайшим образом связано с теоремой о пересечении медиан треугольника в одной точке.

Иначе говоря, прямые, служившие медианами некоторого треугольника, будут пересекаться в одной точке и после того, как, оставив неподвижными те их концы, которые совпадают с серединами сторон данного треугольника, мы переместим их другие концы в вершины треугольника, гомотетичного данному.

Замечание. Если гомотетия двух треугольников обращается в их симметрию, то, очевидно, что точка I_0 становится центром тяжести системы двух симметричных треугольников.

Следствие 2. Сохраним для двух гомотетичных треугольников те же обозначения, какие были даны для перспективных треугольников $A_0B_0C_0$ и ABC . Дадим прямым AA_3 , BB_3 и CC_3 наименование псевдомедиан треугольника $A_0B_0C_0$ и прямым A_0A_3 , B_0B_3 и C_0C_3 наименование псевдомедиан треугольника ABC . Тогда пункт 7-й в применении к гомотетичным треугольникам можно дать в таком виде: две точки пересечения двух троек псевдомедиан и два центра тяжести пары гомотетичных треугольников лежат на одной прямой, проходящей через центр гомотетии.

КРИВИЗНА НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ

Б. Д. Каминский (Ленинград)

Во всех курсах, излагающих вопрос о кривизне нормальных сечений поверхности, это изложение опирается на теорию кривых двоякой кривизны. Исходя из этой теории получают теорему Менье, пользуясь которой легко переходят к изучению кривизны нормальных сечений поверхности.

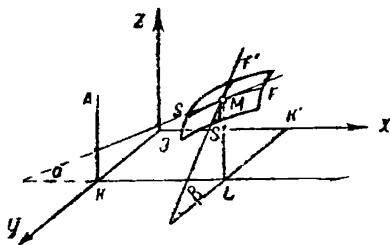
В большинстве вузов указанные отелы не проходятся, между тем во многих практических приложениях приходится сталкиваться с вопросами о кривизне нормальных сечений поверхности в данной точке. В особенности они встречаются в различных пособиях по оптике. Настоящая статья ставит себе целью изложить вопросы о кривизне нормальных сечений поверхности, опираясь только на сведения из геометрических приложений дифференциального исчисления в плоскости.

1. Производная функции от двух независимых переменных по определенному направлению

Пусть дана функция $z = f(x, y)$ от двух независимых переменных x и y . Если принять x, y, z за декартовы координаты в пространстве с осями OX, OY и OZ , то, как известно, геометрическим изображением данной функции z служит некоторая поверхность.

Частная производная по x от этой функции получится, если мы продифференцируем ее, считая y числом постоянным.

Геометрически это означает следующее: если x, y — заданные значения независимых переменных, а z — соответствующее значение функции, то (x, y, z) определяют некоторую точку M на поверхности (фиг. 1). Изменяя x , оставляя y без изменения, мы тем самым перемещаем точку L по плоскости XOY в направле-



Фиг. 1.

нии KL , параллельном оси x ; вместе с тем точка M описывает плоскую кривую SMF , являющуюся пересечением плоскости AKL с нашей поверхностью. При этом тангенс угла α , образуемого касательной к упомянутой кривой в точке M с плоскостью XOY , равен значению частной производной по x от функции $f(x, y)$, т. е. $f'_x(x, y)$, в точке M .

Таким же образом убеждаемся, что частная производная по y от $f(x, y)$, т. е. $f'_y(x, y)$ представляет собою тангенс угла, образуемого касательной к кривой $S'MF'$ в точке M с плоскостью XOY , причем кривая $S'MF'$ является пересечением нашей поверхности с плоскостью MLK' , параллельной координатной плоскости OYZ .

На этом основании можно сказать, что $f'_x(x, y)$ есть производная функции $f(x, y)$ в точке M по направлению оси X , а $f'_y(x, y)$ — производная функции $f(x, y)$ в точке M по направлению оси Y .

Теперь дадим определение того, что мы подразумеваем под производной $f(x, y)$ по направлению прямой, образующей с осью X угол φ .

Пусть M — данная точка на поверхности. Проведем (фиг. 2) через точку K в плоскости XOY прямую KR под углом φ к оси X .

Плоскость MKR пересечет нашу поверхность по плоской кривой SMF . Естественно назвать производной функции $f(x, y)$ по направлению φ тангенс угла γ , образуемого касательной к этой кривой в точке M с плоскостью XOY .

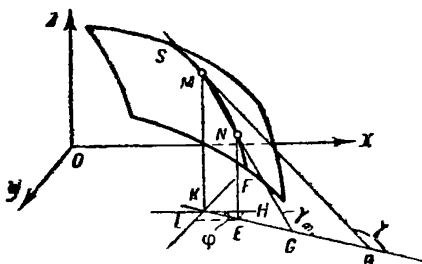
Нетрудно получить выражение для этой производной в зависимости от частных производных и угла φ , пользуясь обычным определением производной и теоремой о производной сложной функции.

Возьмем на фиг. 2 вблизи точки M на кривой FMS точку N ; координаты ее будут $[x + \Delta x, y + \Delta y, f(x + \Delta x, y + \Delta y)]$, где Δx и Δy изображаются соответственно отрезками KH и KL . Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \lim_{KE \rightarrow 0} \operatorname{tg} \gamma_m = \lim_{KE \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{KE}.$$

Примем на прямой KR некоторую точку P (на фиг. 2 не указанную) за начальную и обозначим отрезок PK через s ; тогда $KE = \Delta s$. Координаты x и y точки K можно считать функциями от s , а в таком случае функция $f(x, y)$ есть сложная функция аргумента s . Обозначая искомую производную символом $\frac{\partial f}{\partial s}$, по теореме о производной сложной функции получим:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}.$$



Фиг. 2.

Но нетрудно понять, что $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$, а $\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f'_x(x, y) \cos \varphi + f'_y(x, y) \sin \varphi. \quad (1)$$

Например, если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = [f'_x(x, y) + f'_y(x, y)] \frac{\sqrt{2}}{2}$$

в любой точке с координатами x, y и z (направления $\varphi = \frac{\pi}{4}$).

Полученное выражение для производной по направлению φ есть, в свою очередь, тоже функция от x и y . Можно вычислить и ее производную по направлению φ , т. е. вторую производную по направлению φ , которую обозначим через $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= [f'_x(x, y) \cos \varphi + f'_y(x, y) \sin \varphi]_x \cos \varphi + \\ &\quad + [f'_x(x, y) \cos \varphi + f'_y(x, y) \sin \varphi]_y \sin \varphi = \\ &= f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \cos \varphi \sin \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \sin \varphi \cos \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Значение первой производной характеризует изменение функции $z = f(x, y)$ при движении по направлению φ , а вторая производная характеризует выпуклость и вогнутость кривой FMS . Кривизну этой кривой в любой ее точке можно определить по обычной формуле

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где под y' следует подразумевать первую производную, а под y'' вторую производную по направлению φ . Следовательно, кривизна кривой FMS выражается формулой

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}};$$

подставляя сюда выражения (1) и (2), получим, что

$$K = \frac{f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \sin \varphi \cos \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi}{[1 + (f'_x(x, y) \cos \varphi + f'_y(x, y) \sin \varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3)$$

2. Кривизна нормальных сечений поверхности

Пусть дана поверхность $z = f(x, y)$. Пусть в точке M этой поверхности проведена касательная плоскость Q . Перпендикуляр к этой плоскости, проведенный через точку M , называют нормалью к поверхности в данной точке M . Плоскость, проведенную через эту нормаль и, следовательно, перпендикулярную к касательной плоскости, называют нормальной плоскостью к поверхности в точке M .

Очевидно, что таких нормальных плоскостей можно провести через точку M бесчисленное множество. Каждая такая плоскость пересекает поверхность по некоторой кривой, называемой нормальным сечением поверхности в точке M . Значит, через каждую точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Нормальная плоскость, пересекая поверхность по плоской кривой — нормальному сечению, одновременно пересекает касательную плоскость по прямой линии, которая является касательной прямой к этому нормальному сечению.

Не нарушая общности изложения, можно предположить, что координатная система повернута вокруг начала координат таким образом, что координатная плоскость XOY параллельна касательной плоскости, проведенной через точку M . В таком случае, касательная к каждому нормальному сечению тоже параллельна плоскости XOY и, следовательно, производная по любому направлению в точке M равна нулю. Поэтому кривизна нормального сечения, проведенного по любому направлению (см. формулу (3), равна

$$K = f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \sin \varphi \cos \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi. \quad (3')$$

Из этой формулы видно, что кривизна нормального сечения зависит от угла, образуемого соответствующей нормальной плоскостью с осью OX , так как частные производные второго порядка в данной точке сохраняют постоянную величину. Таким образом кривизна нормальных сечений есть функция угла φ .

Постараемся определить при каких значениях φ кривизна нормальных сечений в данной точке имеет максимум или минимум. С этой целью получим производную кривизны K по φ :

$$K_{\varphi} = -2f''_{xx}(x, y) \cos \varphi \sin \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \cos^2 \varphi - 2f''_{xy}(x, y) \sin^2 \varphi + 2f''_{yy}(x, y) \sin \varphi \cos \varphi = [f''_{yy}(x, y) - f''_{xx}(x, y)] \sin 2\varphi + 2f''_{xy}(x, y) \cos 2\varphi.$$

Затем мы должны, как известно, эту производную приравнять нулю:

$$[f''_{yy}(x, y) - f''_{xx}(x, y)] \sin 2\varphi + 2f''_{xy}(x, y) \cos 2\varphi = 0. \quad (4)$$

Предполагая пока, что $f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ не равны нулю одновременно, получим, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi = - \frac{2f''_{xy}(x, y)}{f''_{yy}(x, y) - f''_{xx}(x, y)}. \quad (5)$$

Если α есть наименьший угол в пределах от 0 до π , тангенс которого равен правой части полученного равенства, то $2\varphi = \alpha$ или $2\varphi = \pi + \alpha$.

Следовательно, $\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Отсюда видно, что два найденных направления φ_1 и φ_2 друг к другу перпендикулярны.

Теперь найдем вторую производную K по φ :

$$K''_{\varphi} = 2 [f''_{yy}(x, y) - f''_{xx}(x, y)] \cos 2\varphi - 4f''_{xy}(x, y) \sin 2\varphi.$$

Подставляя сюда вместо φ сначала $\frac{\alpha}{2}$, потом $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$, получим:

$$K''_{\varphi} = \pm \{2 [f''_{yy}(x, y) - f''_{xx}(x, y)] \cos \alpha - 4f''_{xy}(x, y) \sin \alpha\},$$

причем при $\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$ получается знак $+$, а при $\varphi_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ — знак минус.

Итак, выражение K''_{φ} при $\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ имеет различные знаки. Значит, при одном из значений φ_m кривизна K имеет максимум, а при другом — минимум. Таким образом нами получено следующее предложение: В данной точке поверхности существует два перпендикулярных друг к другу направления, по которым кривизна нормальных сечений имеет максимум и минимум. Эти два перпендикулярных сечения называются главными нормальными сечениями.

Если же одновременно $f''_{xy}(x, y) = 0$ и $f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y) = 0$, то [см. (3')]

$$K = f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y),$$

т. е. кривизна по всем направлениям одинакова, — случай, для нас не представляющий интереса.

Итак, можно сказать, что во всех случаях, в данной точке поверхности существуют два перпендикулярных друг к другу направления, по которым кривизна нормальных сечений максимальная и минимальная (за исключением особых точек, на чем мы здесь останавливаться не станем).

Для дальнейшего изучения кривизны нормальных сечений в данной точке поверхности перенесем начало координат в эту точку и расположим плоскость XOY по касательной плоскости в изучаемой точке поверхности. В этом случае кривизна любого нормального сечения может быть вычислена по формуле (3'):

$$K = f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + 2f''_{xy}(x, y) \sin \varphi \cos \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi. \quad (3')$$

Кроме того расположим координатные оси по главным сечениям. В таком случае главные направления выражаются форму-

лами $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $2\varphi_1 = 0$ и $2\varphi_2 = \pi$. Поэтому $\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \operatorname{tg} 2\varphi_2 = 0$. На основании (5) мы должны заключить, что $f''_{xy}(x, y) = 0$. Значит, формула (3') примет вид

$$K = f''_{xx}(x, y) \cos^2 \varphi + f''_{yy}(x, y) \sin^2 \varphi. \quad (6)$$

При $\varphi = 0$ получается кривизна одного из главных сечений, которую обозначим через K_A . Следовательно,

$$K_A = f''_{xx}(x, y). \quad (7)$$

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получается кривизна второго главного сечения

$$K_B = f''_{yy}(x, y). \quad (7')$$

Таким образом кривизна любого нормального сечения в данной точке выражается следующей формулой (см. 6):

$$K = K_A \cos^2 \varphi + K_B \sin^2 \varphi, \quad (8)$$

где K_A и K_B — кривизны главных сечений, а K кривизна сечения, имеющего направление φ .

Последняя формула называется формулой Эйлера.

Обозначим кривизну сечения, имеющего направление φ через K_φ , тогда кривизну сечения, к нему перпендикулярного, придется обозначить через $K_{\varphi + \frac{\pi}{2}}$.

По формуле Эйлера имеем:

$$K_\varphi = K_A \cos^2 \varphi + K_B \sin^2 \varphi,$$

$$K_{\varphi + \frac{\pi}{2}} = K_A \cos^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + K_B \sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = K_A \sin^2 \varphi + K_B \cos^2 \varphi.$$

Складывая последние два равенства, получим:

$$K_\varphi + K_{\varphi + \frac{\pi}{2}} = K_A + K_B, \quad (9)$$

т. е. сумма кривизн двух взаимно перпендикулярных сечений есть величина постоянная, равная сумме кривизн главных сечений. Таким образом для каждой точки поверхности получается некоторое постоянное число, равное сумме кривизн нормальных сечений.

Полусумма кривизн взаимно перпендикулярных сечений называется средней кривизной поверхности в данной точке. Обозначим ее через K_m . Имеем, что

$$K_m = \frac{1}{2}(K_A + K_B). \quad (10)$$

Далее обозначим кривизну двух нормальных сечений, одинаково наклоненных к одному из главных сечений соответственно через K_φ и $K_{\pi-\varphi}$. Имеем:

$$K_\varphi = K_A \cos^2 \varphi + K_B \sin^2 \varphi,$$

$$K_{\pi-\varphi} = K_A \cos^2(\pi-\varphi) + K_B \sin^2(\pi-\varphi) = K_A \cos^2 \varphi + K_B \sin^2 \varphi.$$

Отсюда

$$K_\varphi = K_{\pi-\varphi}, \quad (11)$$

т. е. кривизна у нормальных сечений, одинаково наклоненных к главному сечению, одинакова.

С помощью формулы Эйлера легко проследить изменение кривизны нормального сечения с изменением направления, но мы этого делать не станем.

О КАЧЕНИИ КРИВОЙ

С. С. Бюшгенс (Москва)

Когда неизменная кривая Γ („катящаяся кривая“) катится без скольжения по данной неподвижной кривой C („база“), то произвольно выбранная точка плоскости, неизменно связанной с катящейся кривой Γ , описывает некоторую кривую C' , называемую „рулеттой“.

Качение является одним из методов образования любых кривых; рулетты не образуют, следовательно, какого-либо специального класса кривых, ибо еще Ла Хир (La Hire, 1706 г.) синтетически доказывал, что если произвольно заданы рулетта и база, то к ним всегда может быть подобрана соответствующая „катящаяся“ кривая. Позднее было установлено, что из трех кривых C , Γ , C' две всегда могут быть произвольно заданы и тогда третья будет вполне определенной кривой. Геометрические и кинематические свойства качения изучались многими геометрами как синтетически, так и аналитически, в последнем случае с помощью обыкновенных или натуральных координат; наиболее обстоятельная монография по этому вопросу (с большим числом разобранных примеров) принадлежит Гупийеру (Haton de la Goupilliere, *Etude géométrique et dynamique des roulettes*, 1910). Однако Гупийер не дает систематического решения всех трех случаев указанной выше задачи определения третьей кривой по двум заданным; он решает лишь некоторые из этих задач, притом для отдельных частных случаев.

Исследуя подробно каждую из представляющихся здесь возможностей, я имею в виду показать аналитически, как находится любая из трех кривых C , Γ , C' , когда даны две из них.

При этом я полагаю, что наибольшая простота в решении этих задач достигается, если пользоваться изображением векторов на плоскости с помощью комплексных чисел.

Как известно, давая комплексному числу

$$z = x + iy \quad (1)$$

геометрическое истолкование (фиг. 1) в виде вектора \overline{OM} , соединяющего начало O декартовой (прямоугольной) системы координат с точкой $M(x, y)$, мы соответственно основным алгебраическим действиям над комплексными числами получим геометрические операции над векторами (сложение и вычитание векторов

по закону параллелограмма, специальное перемножение векторов и т. д.). Если ввести полярные координаты, полагая

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

то, на основании известной формулы Эйлера

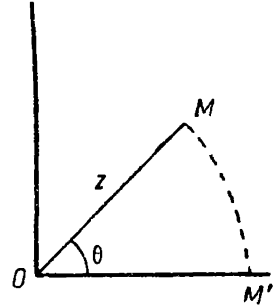
$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad (2)$$

комплексное число (1) примет вид:

$$z = r e^{i\theta}; \quad (3)$$

так как оно изображается вектором \overline{OM} длины r , составляющим с осью OX угол θ , а само действительное число r изображается вектором $\overline{OM'}$ этой же длины на оси OX , то равенство (3) нам непосредственно указывает, что умножение числа r на $e^{i\theta}$ геометрически соответствует повороту вектора r на угол θ ; аналогичное предложение будет справедливо и при умножении любого комплексного числа на выражение вида $e^{i\varphi}$, где φ действительно. Таким образом множитель $e^{i\varphi}$ мы должны толковать как оператор поворота вектора¹⁾.

Если кривая на плоскости определена параметрически, т. е. x и y являются данными функциями какого-либо параметра, то в силу (1) комплекс z будет функцией того же параметра; обратно, задание z как функции некоторого параметра можно считать параметрическим уравнением некоторой плоской линии.



Фиг. 1.

После этих кратких предварительных замечаний перейдем к решению поставленных выше задач.

Допустим, что относительно некоторой прямоугольной системы координат неподвижной плоскости дана линия C (база) уравнением:

$$x + iy \equiv z = z(u); \quad (4)$$

далее, катящаяся линия Γ пусть определяется уравнением

$$\xi + i\eta = \xi = \xi(v), \quad (5)$$

отнесенным к некоторой прямоугольной системе координат $O\xi\eta$, неизменно связанной с подвижной плоскостью линии Γ .

Если кривая Γ катится без скольжения по базе C , то в каждый момент эти две линии касаются друг друга соответствен-

¹⁾ Более подробное изложение геометрической теории комплексных чисел см. в книге Смирнов, Курс анализа, т. II (1-е изд.) или Бюшгенс, Дифференциальная геометрия, литогр. изд. Заочного Сектора МГУ.

ными точками, следовательно элементы dz и $d\zeta$ этих линий будут всегда связаны соотношением:

$$dz = e^{i\theta} d\zeta, \quad (6)$$

где θ есть угол, составляемый в данный момент подвижной осью $O\xi$ с неподвижной осью OX .

Обозначим через \bar{z} комплексное число (переменное), определяющее подвижное начало координат \bar{O} относительно неподвижной системы координат; тогда легко видеть, что

$$z = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta,$$

откуда

$$\bar{z} = z - e^{i\theta} \zeta. \quad (7)$$

Возьмем теперь на подвижной плоскости некоторую определенную точку ζ' ; эта точка, увлекаемая вместе с катящейся кривой, на неподвижной плоскости будет описывать рулетту C' , которая относительно неподвижной системы координат изображится уравнением

$$z' = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta';$$

на основании соотношения (7) мы получим:

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) e^{i\theta} \quad (8)$$

или

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta}. \quad (8')$$

Уравнения (8) и (6) будут основными для решения поставленных задач; ниже мы будем через z_0, ζ_0, \dots изображать соответственно сопряженные комплексы числам z, ζ, \dots

Предположим теперь, что нам дана некоторая база C и катящаяся кривая Γ , изображаемые соответственно уравнениями (4) и (5). Тогда, сравнивая модули обеих частей уравнения (6), мы получим:

$$\sqrt{dz \, dz_0} = \sqrt{d\zeta \, d\zeta_0}, \quad (9)$$

или

$$\sqrt{\frac{dz}{du} \frac{dz_0}{du}} du = \pm \sqrt{\frac{d\zeta}{dv} \frac{d\zeta_0}{dv}} dv, \quad (9')$$

т. е. это соотношение укажет нам, какими точками линии C и Γ касаются в каждый данный момент (при отсутствии скольжения), если мы зададим соответствующие точки касания в начальный момент. Выбор того или другого знака в соотношении (9') будет соответствовать выбору определенного способа качения одной кривой по другой; именно, выбор знака $+$ будет соответствовать такому качению, при котором совмещаемые точки движутся по каждой из кривых в сторону роста их параметров; при выборе

знака минус получим такое качество, при котором совмещаемые точки по одной кривой будут двигаться в сторону роста параметра, по другой же в сторону его убывания. Когда с помощью соотношения (9') параметр v будет определен, как функция параметра u , тогда уравнение (8) даст нам рулетту (отнесенную к неподвижным осям).

Возьмем для примера две окружности и предположим, что на каждой из них параметр выбран так, что его возрастание дает левый обход линии; тогда уравнение окружности — базы может быть написано в виде:

$$z = ae^{iu},$$

а уравнение катящейся окружности в виде:

$$\zeta = be^{iv}.$$

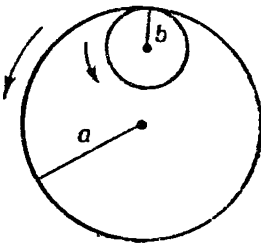
Если возьмем в соотношении (9') знак $+$, мы получим:

$$a du = b dv,$$

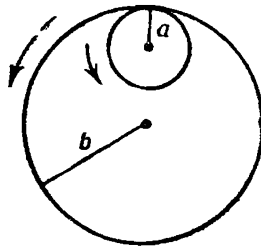
откуда

$$v - v_1 = \frac{a}{b} (u - u_1),$$

где u_1 и v_1 значения параметров, соответствующие точкам, совмещенным в начальный момент; при таком выборе знака в соотно-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

шении (9'), окружности будут катиться одна по другой разноименными сторонами, т. е. при $a > b$ вторая окружность своею внешней стороной будет катиться по внутренней стороне первой (фиг. 2), при $a < b$ вторая окружность своею внутренней стороной будет катиться по внешней стороне первой (фиг. 3). По формуле (8) уравнение рулетты мы получим в виде:

$$z' = (a - b) e^{iu} + \zeta' e^{i \frac{b-a}{b} u + i \frac{au_1 - bu_1}{b}}.$$

Если же мы возьмем в соотношении (9') знак $-$, мы получим:

$$a du = -b dv,$$

и тогда вторая окружность своею внешней стороной будет катиться по внешней стороне первой окружности.

Перейдем теперь к решению второй из наших задач, именно, предполагая, что дана база (4) и рулетта

$$z' = z'(w), \quad (10)$$

будем искать соответствующую катящуюся линию Γ .

Из уравнения (8) мы получим:

$$\zeta = \zeta' - (z' - z)e^{-\theta}; \quad (11)$$

подставляя это выражение ζ в условие (6), найдем:

$$dz' = i(z' - z)d\theta. \quad (12)$$

Одновременно с полученным равенством должно выполняться и равенство сопряженных величин, поэтому

$$dz'_0 = -i(z'_0 - z_0)d\theta. \quad (12')$$

Соотношение (12) и (12') показывают, что необходимо должно выполняться условие:

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz'_0}{z'_0 - z_0} = 0 \quad (13)$$

или, что то же самое:

$$\frac{1}{z' - z} \frac{dz'}{dw} + \frac{1}{z'_0 - z_0} \frac{dz'_0}{dw} = 0. \quad (13')$$

Это условие (13') определит w как функцию от u , затем из уравнения (12) квадратурою мы найдем угол θ и тогда уравнение (11) будет изображать искомую кривую Γ .

Соотношение (12) геометрически обозначает, что направление dz' касательной к рулетте перпендикулярно к вектору $z' - z$, соединяющему соответствующие точки базы и рулетты, или, иначе говоря, нормаль рулетты в какой-либо ее точке проходит через соответствующую ей точку базы (точку касания базы с катящейся кривой). Таким образом, чтобы для какой-либо точки M базы получить соответствующую ей точку M' рулетты, надо из точки M провести нормаль к рулетте; вот почему в данной задаче мы получили для параметров w и u конечное соотношение (13'), а не дифференциальное, как в предыдущей задаче.

Рассматриваемая задача окажется возможной, когда соотношение (13') на самом деле будет содержать оба параметра u и w и притом для действительных значений u оно будет определять действительные значения w .

Возможно ли, например, за базу принять прямую

$$z = u$$

и за рулетту — окружность

$$z' = a + be^{iw},$$

где a — комплексное число, определяющее ее центр, b — ее радиус.

В этом случае условие (13') напишется в виде:

$$\frac{1}{a + be^{iw} - u} - \frac{1}{a_0 + be^{-iw} - u} = 0,$$

и из него выпадает параметр u ; таким образом эта задача невозможна.

Наоборот, если мы за базу примем окружность

$$z = ae^{iu},$$

а за рулетку — прямую (для простоты — проходящую через начало координат)

$$z' = e^{ia} w,$$

то задача будет возможной: условие (13') дает нам

$$\frac{e^{ia}}{e^{ia}w - ae^{iu}} + \frac{e^{-ia}}{e^{-ia}w - ae^{-iu}} = 0$$

откуда

$$w = a \cos(u - a).$$

Далее соотношение (12) дает нам после преобразований

$$d\theta = -du,$$

или

$$\theta = -u + c.$$

По формуле (11) мы получим уравнение катящейся кривой Γ :

$$\zeta = \left[\zeta' - \frac{a}{2} e^{i(2a-c)} \right] + \frac{a}{2} e^{2i\left(u - \frac{c}{2}\right)},$$

а это будет уравнение окружности радиуса $\frac{a}{2}$, т. е. мы получим пару кругов Кардана¹⁾.

Наконец перейдем к решению третьей задачи о качении: пусть нам дана рулетка (10) и катящаяся кривая (5), будем искать базу. В этом случае из уравнений (8) и (6) мы получим

$$dz' = i(\zeta' - \zeta) e^{i\theta} d\theta, \quad (14)$$

и, следовательно,

$$dz'_0 = -i(\zeta'_0 - \zeta_0) e^{-i\theta} d\theta; \quad (14')$$

эти два условия дадут нам прежде всего (дифференциальное) соотношение между параметрами u , w , а затем определят z как функцию одного из них.

¹⁾ См. Бюшгенс, Аналитическая геометрия, вып. 1, упр. 313.

Исключая θ из уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{dz' dz'_0} &= \varepsilon \sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)} d\theta, \\ \frac{dz'}{dz'_0} &= -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'_0 - \zeta_0} e^{2i\theta}, \quad (\text{где } \varepsilon^2 = 1) \end{aligned} \quad (15)$$

мы найдем:

$$d \ln \frac{\zeta'_0 - \zeta_0}{\zeta' - \zeta} \frac{dz'}{dz'_0} = 2i \frac{\varepsilon \sqrt{dz' dz'_0}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)}},$$

или

$$d \ln \left(\frac{\frac{dz'}{dw}}{\frac{dz'_0}{dw}} \right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta'_0 - \zeta_0} = 2i \frac{\varepsilon \sqrt{dz' dz'_0}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)}}. \quad (16)$$

Таково будет дифференциальное уравнение, устанавливающее зависимость между параметрами v и w ; произвольное постоянное в конечном соотношении между v и w показывает, что для начального момента мы можем установить соответствие между двумя произвольными точками заданных кривых (рулетты c' и катящейся кривой Γ).

Когда определены $w = w(v)$ и $\theta = \theta(v)$, уравнение искомой базы представится в виде:

$$z = z' - (\zeta' - \zeta) e^{i\theta}; \quad (17)$$

по этому уравнению видно, что выбор постоянного ζ' не играет существенной роли, ибо его изменение соответствует лишь параллельному перемещению кривой $\zeta = \zeta(v)$ в ее плоскости.

В качестве примера для этой третьей задачи возьмем за рулетку прямую

$$z' = w$$

и за катящуюся кривую спираль Архимеда:

$$\zeta = av e^{iw} + \zeta';$$

для простоты за точку ζ' мы наперед принимаем начало спирали.

В таком случае уравнение (16) даст нам:

$$-a dv = \varepsilon dw;$$

если принять $\varepsilon = -1$, то получим:

$$a dv = dw,$$

или

$$w = av + c,$$

т. е. значение пойдет так, что соответственные точки по обоим линиям будут передвигаться в сторону роста каждого параметра.

Затем уравнение (15), принимающее здесь вид:

$$e^{2i\theta} = -e^{-2iv}$$

определит нам θ , именно

$$e^{i\theta} = ie^{-iv};$$

наконец, уравнение базы (17) получится в виде:

$$z = av + c + aiv,$$

или

$$z = a(1 + i)v + c;$$

это будет прямая

$$x - y = \text{const.},$$

параллельная биссектрисе координатного угла неподвижной системы.

КАК НЕ СЛЕДУЕТ ПИСАТЬ И ИЗДАВАТЬ МАССОВУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛИТЕРАТУРУ

Д. А. Крыжановский (Одесса)

В условиях современных многотысячных тиражей советских массовых изданий вопрос о дефектах книжной продукции и мерах борьбы с ними приобретает исключительную злободневность и остроту. Обратит внимание как производителей нашей математической литературы — авторов, переводчиков, чертежников, редакторов, рецензентов, наборщиков, корректоров, так и ее потребителей — читателей, учащихся и учащихся, на типичные недочеты этой продукции и на возможные способы их устранения, — такова цель этой статьи.

Дефекты готового печатного произведения могут возникать либо в процессе изготовления самой авторской рукописи, копии этой рукописи (писанной или машинной), чертежей и другого иллюстративного материала, либо, наконец, в процессе набора и печатания. Дефекты авторской рукописи я подразделяю на дефекты, обусловленные личными свойствами автора, и на случайные недочеты. К первой категории относятся научные промахи, происходящие от принципиальных заблуждений автора или той научной школы, к которой он принадлежит, или даже свойственные всем ученым данной эпохи. Интереснейший перечень ряда таких заблуждений в области анализа содержится в критических „Примечаниях“ Пеано, приложенных к курсу „Дифференциального исчисления“ Дженокки-Пеано (есть русский перевод проф. Поссе, 1922). Ошибки этого рода характерны тем, что авторы упорно цепляются за них, и никакие аргументы не могут их переубедить. По отношению к такого рода дефектам не может быть никаких рецептов для их устранения (самим автором или с согласия автора), и дело критики готового произведения — их обнаруживать. В противоположность этому, случайные недочеты легко могут быть обнаружены и устранены либо самим автором, при более внимательном просмотре рукописи или при чтении корректуры, либо в результате указания на них со стороны. Вряд ли надо объяснять, что настоящая статья имеет в виду исключительно дефекты этой второй категории.

В чем же заключаются наиболее часто встречающиеся недочеты математической литературы? Следующий перечень охватывает главнейшие из них:

1) В определениях, теоремах и теориях: а) нечеткость, двусмысленность, небрежность редакции; б) неполнота, упрощенчество; в) ненаучность определений; г) ложность теорем; д) неправильное изложение чужих теорий; е) нелепость, взаимная противоречивость отдельных утверждений.

2) В доказательствах: а) небрежность, нечеткость (в частности, когда одна и та же буква употребляется в разных смыслах); б) неполнота рассуждений (легко устранимая), упрощенчество, явные описки и опечатки; в) ошибочность отдельных моментов в доказательствах; г) ошибочность всего доказательства в целом при верности теоремы; д) ложность самой теоремы.

3) В чертежах и других иллюстрациях: а) обозначения (буквы, цифры) не соответствуют тексту; б) относительные размеры частей диаграмм и чертежей не отвечают числовым данным; в) запутанность, ненаглядность; г) геометрическая ложность.

4) В примерах и задачах: а) несоответствие излагаемой теории; б) неясность условий (данных) и требований; в) нелепые, противоречивые требования; г) недостаточное количество данных (непреднамеренная неопределенность); д) ошибки в решениях примеров и задач в тексте; е) ошибки в ответах и решениях к ним.

5) В транскрипции иностранных имен: а) отсутствие русской транскрипции; б) произвол в русской транскрипции (несоответствие принятой транскрипции или иностранному произношению).

6) В стиле: а) общие дефекты в языке и тяжеловесность стиля; б) математическая тяжеловесность, монотонность, невыразительность.

Перечисленные дефекты встречаются в любой математической печатной продукции. Но в журнальных статьях и в книгах не учебного характера встречаются очень часто еще и такие недочеты:

7) В цитатах: неполнота в указаниях источников (дается название журнала без указания тома или года или автора статьи).

8) В теоремах, доказательствах и теориях: а) излишняя скромность авторов, не отмечающих, что излагаемый материал принадлежит им; б) наоборот, отсутствие указаний на действительного автора данной теоремы и т. д., что иногда заставляет читателя приписывать ее автору статьи.

Остается еще упомянуть наиболее частый и прискорбный 9-й вид дефектов — типографские опечатки в словах, формулах, нумерации чертежей и даже перестановку целых абзацев и помещение чертежей в неверном положении или не на своем месте.

Прежде чем обратиться к вопросу о средствах предупреждения вышеперечисленных недочетов я приведу несколько конкретных примеров таких недочетов. Примеры беру, главным образом, из продукции последних 10—15 лет, в значительной мере из изданий украинских, а частью из массовых журналов и сборников последних трех лет; примеры я сопровождаю двумя числами: номером (жирной цифрой) из перечня, помещенного в конце статьи, и номером страницы.

Начну с последней категории дефектов — фактических опечаток, т. е. типографских ошибок при воспроизведении текста авторской рукописи или ее копии. Если обратиться к мировым заграничным фирмам, то наблюдаем следующее: в изданиях Готье-Виллара (Париж) и кембриджской университетской типографии опечаток или совсем не бывает, или же они исчисляются единицами на целые тома. Но в изданиях Тейбнера (Лейпциг) бывало по 2—3 страницы одних „замеченных“ опечаток и исправлений. Впрочем, значительная часть последних (часто помещаемых

в последующих томах многотомных сочинений) являются, очевидно, результатом недосмотра не типографии, а самого автора. В заграничных основных математических журналах опечатки тоже встречаются очень редко.

К сожалению, этого нельзя сказать о наших изданиях. Вот наиболее яркий известный мне пример — настоящая гекатомба опечаток: в одном начальном курсе математики (1)¹⁾, предназначенном для бывших профшкол, рабфактов и самообразования (изд. 1922 г.), на 322 страницы текста приходится $20\frac{1}{4}$ (двадцать!) страниц „наиважнейших“ опечаток, как гласит название их списка, причем большинство их — ошибки именно набора, а не автора или переводчика. Всего в этом перечне помещено около 860 опечаток и среди них — 32 повторных, т. е. таких, что указано только первое место их появления в книге, с лаконичной ремаркой: „и далее“, т. е. предлагается читателю уже самому заняться дальнейшим выуживанием такой же опечатки в других местах текста.

Печально, когда книга сопровождается аршинным перечнем опечаток. Но еще хуже, если книга сама полна опечаток, которых нет в списке последних. Вот передо мною учебник (1927) тригонометрии (2), „допущенный к употреблению и т. д.“. В нем перечень опечаток отсутствует. Но на 12-й странице подписи под чертежами синусоиды и косинусоиды перепутаны, а на стр. 19 все три числовых примера, долженствующие пояснить формулы приведения, содержат ошибки, например: $\cotg 242^\circ = \cotg (270^\circ - 28^\circ) = -\tg 28^\circ$. На стр. 10 автор поучает: „линии тангеиса, котангенса, секанса и косеканса имеют период 180° “. Впрочем, это уже не опечатка, а явная описка самого автора.

Но вот совсем свежий пример. В книге, изданной в 1935 г. (ОНТИ Украины) (3), на 384 страниц текста имеется 6 страниц одних „замеченных“ опечаток, причем все они имеют явный характер типографских опечаток, а не недосмотров автора.

Обращаясь к недочетам, помещенным выше под пп. 7 и 8. Здесь речь идет не об ошибках, а об отсутствии желательных качеств у массовой математической литературы. Ведь такая литература служит, прежде всего, для целей обучения, повышения математического уровня читателя. Следует, поэтому, избегать всего, могущего дать повод к возникновению у читателя ложных представлений, и, наоборот, попутно сообщать максимум полезных знаний. Если автор излагает найденную им самим теорему или целую новую теорию, то следует, без излишней скромности, так или иначе отметить это обстоятельство, чтобы избавить читателя от напрасных поисков литературы, освещающей тот же вопрос. Еще важнее, при изложении чужих теорий, примеров и т. д. — особенно, если они в науке связаны (справедливо или нет, это другой вопрос) с определенными именами, — называть эти имена; этим пополняется осведомленность читателя и заодно избегается опасность такого конфуза для автора статьи или книги (все это относится, главным образом, к журнальным статьям, а не к учебникам), что читатель сочтет прочитанное

¹⁾ Жирные цифры в скобках обозначают ссылки на перечень литературы, помещенной в конце статьи.

открытием автора и так и процитирует где-нибудь как теорему такого-то. Вот пример: в одном недавно вышедшем сборнике (4) автор одной статьи, иллюстрируя зависимость предела площади вписанного в поверхность полиэдра от выбора его граней, говорит: „Покажем это на следующем простом примере“ и излагает далее классический пример Шварца, не упоминая его имени (стр. 157). Читатель легко может приписать пример автору статьи и во всяком случае, если ему случится где-нибудь прочесть слова: „пример Шварца“, то он не будет знать, что речь идет именно об этом, известном ему, примере.

Неполное указание источника тоже не достигает цели. В первом выпуске одного сборника (5) помещены две заметки подряд (стр. 19 и 22), с одинаковым указанием: „Journal de Mathématiques élémentaires“. Ни год, ни том, ни страница не указаны. С таким же успехом можно было просто написать: „заимствовано из французского журнала“. А между тем мне, например, было бы интересно знать, из какого тома взята вторая заметка, чтобы установить, действительно ли там, в оригинале, напечатана та же ахиня, какую преподносит анонимный автор русской заметки (об этом речь впереди).

Минуя вопрос о неудачном стиле, скажем два слова о транскрипции собственных имен (фамилий). Даже для знающего хорошо иностранные языки специалиста не всегда ясно, как следует произносить то или иное иностранное имя; тем более это необходимо указывать в издании массового характера. Но наряду с русской транскрипцией следует приводить и оригинальное начертание имени, кроме случаев общеизвестных имен (Ньютон, Галилей,...), где это необязательно. Во избежание разнобоя в русской транскрипции иностранных имен, следовало бы создать какую-нибудь авторитетную комиссию, которую авторы и редакторы могли бы запрашивать о правильном произношении и русском правописании иностранных имен. Иначе получается полная неразбериха, как случилось, например, с именем творца волновой механики: его зовут, судя по русским изданиям, и Дебройль, и Де-Брогли, и Де-Бройли, и т. д. В украинских изданиях наблюдалась тенденция приблизить транскрипцию к „настоящему“ произношению, в результате чего появились не только Телёр, Ойлер, но и „Напірові“ логарифмы, Уолз (=Валис!), и т. д. Единообразие в этом отношении надо добиваться непременно.

Для иллюстрации дефектов в чертежах, примерах и задачах, ограничусь двумя-тремя образцами. Синусоида изображается иногда в виде кривой, составленной из ряда полукругов [(6), стр. 102]. Логарифмическая спираль тоже начинается полукругом (13, рис. 19). Рекорд комбинированной нелепости в чертеже и в тексте к нему побил автор уже цитированного выше учебника тригонометрии (2, стр. 45, 1927 г.), откуда этот перл перекочевал во всей красе в общее руководство по математике для профшкол (1929 г.), составленное тем же автором в сотрудничестве с двумя другими коллегами (7, стр. 485). А именно, в качестве первого образца применения графического метода к решению тригонометрических уравнений, для решения уравнения $\sin x = x$ рекомендуется построить графики функций $y = \sin x$ и $y = x$ и определить абсциссы трех точек N_1, O, N_2 их пересечения, каковые точки действительно показаны тут же на чертеже. Кроме того рекомендуется сделать все построение на

миллиметровке. Автор „всего только“ упустил из виду, что при $x \neq 0$ $|\sin x| < |x|$ и что синусоида не пересекает биссектрису I—III координатного угла в начале координат, как показывает его чертеж, а, персгибаясь, касается этой биссектрисы. Допустим, что автор, увлекшись идеей графического решения, упустил из виду оба факта. Но о чем думали специалисты из методкома, рекомендовавшего учебник, и оба сотрудника, давшие свои подписи под коллективным трудом? А что должен думать ученик (или даже иной наивный учитель, слепо верящий рекомендации высокого органа), только что перед тем усвоивший неравенство $|\sin x| < |x|$?

А вот пример ошибки более тонкой. В одном из упомянутых сборников, в статье о пространственных диаграммах (5, вып. 2, стр. 49) автор определяет аппликату z' точки внутри пространственного четырехугольника с проекцией (x, y) на плоскости $ХОУ$ посредством некоторого интерполирования, притом двумя способами, и утверждает, что оба способа дают одно и то же значение z' . На его чертеже оно как будто так и выходит. Но ведь четырехугольник может быть косым (не плоским), и тогда обе его трансверсали не пересекутся (иначе фигура была бы плоской) и дадут разные значения z' . Тут же в тексте две опечатки в одной строке (9-я снизу).

Еще пример. Черт. 77 (стр. 59) одного русского учебника высшей геометрии (8) содержит режущую глаз погрешность (перспективного построения). Ошибка вместе с чертежом переходит в украинское издание того же учебника. Этот пример понадобится нам для окончательных выводов.

10-е издание стабильного учебника алгебры (9) с многотысячным тиражем (1933 г.) содержит (стр. 92, упр. 152) задачу на составление системы двух уравнений, условие которой позволяет, однако, составить только одно уравнение; ответ условиям задачи не удовлетворяет. Правда, в новом издании этот недосмотр устранен. Но сколько тысяч ребят помучились впустую над решением неразрешимой задачи?

Перехожу к последнему и самому важному типу дефектов — в доказательствах, теоремах и целых теориях.

Пожалуй, чаще других встречаются промахи, связанные с употреблением неравенств. В курсе алгебры (10), написанном автором, много содействовавшим внесению точности и строгости в преподавание у нас алгебры, встречаем (стр. 126) такую ложную теорему: „если $|x_n| < a$, начиная с некоторого n , ..., причем $|y_n|$ — бесконечно мало, то ..., начиная с некоторого n , $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \omega$, где ω сколь угодно большое положительное число“.

Здесь неравенство $|x_n| < a$ — не описка или опечатка [вместо $|x_n| > a$],

так как автор, опираясь на него, доказывает, что из $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \omega$ следует

неравенство: $|y_n| < \frac{a}{\omega}$, каковой вывод он без всякого основания затем обращает, утверждая, что из последнего неравенства следует, обратно,

$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \omega$. Отметим еще в редакции теоремы пропуск слов „заранее заданное“ (перед „сколь угодно“).

От этого давнего курса (1896 г.) перейдем к учебнику дифференциального исчисления 1931 года, допущенного в качестве пособия для педвузов на Украине (11). На стр. 22 читаем: „Теорема. Частное двух ограниченных величин есть величина ограниченная“. Доказательство кратко: „Пусть $|x| < k$ и $|y| < l$, причем $y \neq 0$; тогда $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} < \frac{k}{l}$, т.е. $\left| \frac{x}{y} \right| < \frac{k}{l}$ или $\frac{x}{y}$ — величина ограниченная“.

Думать, что по мысли автора y является ограниченной не сверху, а снизу, т.е. что условие $|y| < l$ стоит по описке вместо $|y| > l$, не приходится, так как тогда добавочное условие $y \neq 0$ было бы излишне. Затем идет „Следствие“. Частное от деления постоянной величины на ограниченную само есть величина ограниченная“ (!). А на стр. 42 читаем: „С другой стороны, $\frac{1}{y}$ есть величина конечная, так как y величина конечная“ (!). На стр. 62 (в строке 2 св.) то же недоразумение со знаком неравенства...

Но вот передо мною 2-е издание (1922 г.) и 8-е издание (1930 г.) самого распространенного у нас переводного учебника анализа (12). В обоих изданиях (как вероятно, и в английском оригинале) доказательство теоремы (Шварца) о безразличии порядка кратного дифференцирования по разным переменным содержит такой логический промах (12а, стр. 211; 12б, стр. 505): в формуле

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x \cdot f'_x(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y)$$

автор изменяет y на $y + \Delta y$, сохраняя неизменным значение θ_1 ; между тем, это значение зависит, вообще говоря, не только от значений x и Δx , но и от значения y . В последнем издании (13-м, 12б) это доказательство просто выпущено (без замены его правильным). Совершенно непонятно, как мог этот дефект оставаться незамеченным сотнями профессоров, доцентов и ассистентов, обучавших по этому руководству десятки и сотни тысяч студентов в течение ряда лет. Возможно, что многие его обнаружили, но никто из них не дал себе труда сообщить об этом редактору или издательству.

Еще пример из дважды цитированного сборника (5, вып. 2, стр. 21—22). Сперва автор (математик высококвалифицированный, с большим психическим опытом и заслугами) дает довольно сбивчивое доказательство того, что при всяком разбиении выпуклого n -угольника диагоналями на взаимно неналегающие треугольники получается по крайней мере два треугольника, примыкающих (каждый) двумя сторонами к периметру многоугольника (хотя из доказательства и из дальнейшего видно, что автор имеет в виду существование хоть одного, а не двух треугольников такого рода). Обозначив через T_n число треугольников, на которые n -угольник разбивается диагоналями, и оговорив эвентуальную возможность многозначности этой функции числа n (в зависимости от способа разбиения), автор выводит формулу: $T_n = T_{n-1} + 1$, добавляя: „и это — независимо от способа разбиения“. Здесь следовало бы пояснить читателю массового сборника, что смысл приведенного

равенства (покуда не устранена возможность многозначности T_n) таков: всякое (если их больше одного) определенное значение T_n на единицу больше одного из значений T_{n-1} (если бы их было несколько). И только из дальнейших рассуждений автора следует однозначность функции T_n (при всяком значении n), что тоже надлежало бы подчеркнуть.

Обращаюсь к той заимствованной из французского журнала заметке (тот же сборник, 5, вып. 1, стр. 23), которую я позволил себе выше квалифицировать резким образом. Судите сами: „Накладываем $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы $B'C'$ совпало с BC , и определим положение точки A' . Ясно, что эта точка будет или внутри, или вне треугольника ABC . Предположим... Итак A не может быть ни вне, ни внутри треугольника; следовательно, она упадет на одну из сторон...“. Пропуск двух-трех слов испортил дельную идею.

Прошу еще немного внимания. Что должен думать юный первокурсник — втузовец или матфаковец, прочитав одну за другой такие две сентенции (одну — посредине страницы, другую — в подвале той же страницы, в выноске): 1) „Для нас особенно существенным будет то обстоятельство, что переменное x изменяется все время...“; 2) „Для нас важно, собственно, не то, что переменная x изменяется все время, а...“ (12в, стр. 73). Это — в самом ходком учебнике анализа. Объясняется все дело вероятно тем, что выноска была вставлена в позднейшем издании.

А что вынесет читатель уже использованной нами статьи об измерении поверхностей (4) из такого „общего положения“ (стр. 159): „Две поверхности S_1 и S_2 будут иметь величины, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга, если соответствующее расстояние между ними становится неограниченно малым, а углы между соответствующими касательными плоскостями также становятся сколь угодно малыми“? И это — без всякого пояснения того, что именно надо понимать под „соответствующими“ расстояниями и касательными плоскостями... Думається, что „соответствующий“ выигрыш читателя от прочтения этого слишком уж общего положения будет тоже „неограниченно мал“. В заключительном абзаце (стр. 160) автор еще раз возвращается „к соответствующим“ образам: „Всякую заданную нам поверхность мы можем вычислить указанным нами способом полиэдра (здесь наивный читатель решит, что этот способ изобретен самим автором статьи), но при соблюдении лишь одного условия, чтобы грани этого полиэдра стремились бы в пределе стать параллельными соответствующим касательным плоскостям поверхности“, — снова без всяких комментариев насчет „соответствия“. Хотелось бы, чтобы авторы тоже „соблюдали одно условие“, а именно — тоже „стремились стать“ в положение своих читателей. В этой же статье имеется ряд опечаток, описок и несоответствие букв чертежа тексту (стр. 156—11, 13 св.; стр. 157—21 св.; стр. 158—1, 13, 15 св.; 159—23 св.; черт. 4).

Приведу пример недопустимого упрощенчества и слишком рискованных рассуждений „по аналогии“, выдаваемых за достаточные обоснования. Выведа формулу расстояния двух точек в пространстве, $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, автор одного украинского „Введения в высшую математику“ (13, стр. 20) на основании аналогии этой формулы с соответствующей формулой для плоскости говорит: „Прибавляя пространственную коор-

динату 2, мы из плоской геометрической фигуры получаем пространственное тело, которое соответствует нашей фигуре. Например, кругу на плоскости отвечает шар в пространстве трех измерений. А поскольку уравнение круга было $x^2 + y^2 = a^2$, то уравнение поверхности шара будет $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Эллипсу на плоскости соответствует геометрическое тело—эллипсоид. Уравнение эллипса было: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Уравнение поверхности эллипсоида будет иметь форму: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Не вправе ли после этого иной шустрый учащийся „вывести“ из уравнения гиперболы, $xy = 1$, такое уравнение „гиперболоида“ $xyz = 1$?

Отмечу еще один очень частый источник ошибок, особенно в доказательствах. Автор, заимствуя материал (например, доказательство какой-нибудь теоремы) из других книг, не дает себе труда критически его продумать, прежде чем вставлять в свою работу, полагаясь на авторитет других авторов, особенно если это рассуждение повторяется в ряде изданий. В 1914 г. я обратил внимание автора прекрасной, строгой книжки по теории функций, — крупного немецкого математика, — на принципиальную ошибку в доказательстве одной фундаментальной теоремы в этой книге (14, стр. 22). В ответном письме автор, признавая свой промах, ссылаясь в свое оправдание на то, что это же самое доказательство встречается и у других авторов, в том числе в не раз переиздававшейся известной книге одного маститого математика (Буркгардта).

Перехожу к основному вопросу о том, какими мерами можно было бы достичь устранения или во всяком случае значительного уменьшения дефектов математической литературы.

Прежде всего, в процессе изготовления рукописи от автора требуется максимальное внимание ко всем ее деталям, самостоятельное критическое продумывание всего материала, хотя бы даже заимствованного из самых распространенных изданий или из авторитетнейших источников.

Второе условие: автор должен видеть копию (машинную) своей работы, прежде чем она поступит в набор, а также чертежи, сделанные по его эскизам, и отпечатки клише. Вообще, если работа принята окончательно к печатанию, то это дает автору лишний импульс к внимательному пересмотру всей рукописи (или копии с нее), во время которого он наверное обнаружит не мало дефектов, незамеченных им раньше, когда не было уверенности в том, что работа будет напечатана.

Однако, сколько бы раз сам автор ни пересматривал свою работу, это никогда не гарантирует от того, что ряд логических промахов либо недостатков дидактического порядка не ускользнет от него. Поэтому в случае учебной и вообще массовой литературы совершенно необходимо, чтобы всю работу (в рукописи либо в корректурных листах) внимательно прочли еще и другие специалисты. В этом отношении нам следует решительно взять пример с иностранных математиков. У них (особенно у немцев) очень распространен обычай давать свою работу, в рукописи и особенно в корректурных листах, на прочтение своим друзьям и ученикам, и не одному, а часто двум, трем и больше. В предисловии к одной недавно вышедшей английской книге (15) ее авторы — два англичанина

и один, кажется, венгерец (все три — первоклассные математики с большим авторским опытом) — сообщают, что рукопись или корректура книги была просмотрена целым рядом (чуть ли не десятком) крупных математиков, так что они, авторы, надеются, что книга не содержит промахов! А у нас бывает так, что автор первый же свой труд, не дав его на просмотр товарищам, бухает в печать. При таких условиях неизбежны, конечно, те конфузы, примеры которых мы видели выше.

Следовало бы также установить ответственность, — хотя бы общественного характера, путем печатания имен рецензентов, — тех органов, которые одобряют, допускают, рекомендуют книгу к употреблению там-то и теми-то. Это побудило бы их к более серьезному отношению к взятой на себя работе.

Но вот рукопись уже окончательно исправлена, проверена и переписана на машинке, и копия тоже сверена и просмотрена автором. Чертежи изготовлены по наброскам автора, одобрены им, клише по ним тоже готовы. Материал поступает в типографию, в набор. Качество первоначального набора, степень его безошибочности не только в огромной степени определяет собою количество труда корректоров и автора по его исправлению, но и резко влияет на продолжительность всего пребывания книги в типографии до момента выпуска в свет. Вот почему необходимо принять меры к резкому повышению математической культуры наборщиков математической литературы.

Отпечатанные листы следует посылать сразу же, по мере их печатания, автору и редактору для своевременного выявления и составления перечня вкравшихся все же опечаток или авторских промахов. О парижском издателе Готье-Вилларе мне говорили, будто он выставляет корректурные или уже отпечатанные листы для публичного просмотра и платит всякому, обнаружившему ошибку, определенный гонорар. Заплатные математики якобы усердно просматривают эти витрины, выискивают промахи и тем содействуют высокому качеству изданий Виллара. Независимо от того, сколько правды и сколько фантазии в этом рассказе, почему бы нам не попробовать посылать корректурные оттиски хотя бы в математические факультеты для вывешивания и не установить премирования за выискивание промахов студентами или преподавателями. Я уверен, что такой прием вызвал бы огромный интерес у студентов-математиков (другие факультеты тоже могут применить этот прием) и заодно вырабатывал бы у них привычку к чтению корректур, которая в будущем окажется им очень полезной.

Когда книга выпущена в продажу, наступает период освоения ее читателем. Тысячи учащихся выучивают по ней теоремы и их доказательства, решают примеры и задачи. При этом все более поверхностные дефекты обязательно должны обнаруживаться, в виде ли плохого понимания учениками или студентами отдельных мест теории или же в форме расхождения получаемых ответов с ответами, данными в книге и т. д. Более тонкие промахи обнаружат преподаватели или более одаренные студенты. Но вот выходит новое издание учебника с теми же промахами. И так бывает у нас сплошь и рядом. Бывает, хотя и значительно реже, и заграницей. Так, кажется, в самом распространенном во Франции учебнике алгебры Бореля во втором издании (16, стр. 307) 1904 г. при

вычислении Δy для функции $y = 2x^2 - 5x + 4$ (в параграфе, дающем определение понятия производной) пропущен в двух формулах: $\Delta y = 4x \Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 5 + \Delta x$, множитель „2“ при $(\Delta x)^2$ в первой и при Δx во второй (причем обе формулы помечены сбоку одним номером — тоже опечатка или описка!). Та же ошибка повторяется и в третьем „просмотренном, исправленном и дополненном“ издании (166) 1905 года! Невозможно допустить, чтобы сотни преподавателей и тысячи учащихся не обнаружили этой детской описки. Но факт повторения ее в новом („исправленном“) издании показывает, что никто не считал нужным написать о ней автору либо издателю.

Вот с этой разобщенностью или отчужденностью между автором и издательством, с одной стороны, и читательской массой, — с другой, с отсутствием контакта между ними, и надо вести самую энергичную борьбу. Обращения в предисловиях к читателям с просьбой делиться с авторами и издательствами своими замечаниями до сих пор дают мало результатов, по крайней мере у нас — математиков, если судить хотя бы по тем поразительным примерам, какие я приводил выше. Из моей личной практики могу сообщить, что ни от одного незнакомого мне читателя написанных, переведенных или отредактированных мною книг (содержащих даже указание моего личного адреса в предисловиях) я не получил ни одного замечания, пожелания и т. п., если не считать двух-трех запросов о выходе в свет дальнейших выпусков русско-украинского словарика по математике.

Здесь возможно такое явление психологического порядка: чем наивнее описка автора или опечатка, тем более читатель стесняется писать о ней, полагая, что автор, конечно, и сам ее уже заметил, или что о ней ему уже написали десятки других читателей. А в результате такого гипотезирования ошибка переходит из издания в издание! Между тем бессмысленно ожидать, чтобы какой-нибудь редактор-академик сам тратил свое драгоценное для страны время на выискивания мелочных дефектов в школьном учебнике.

Но даже независимо от выпуска нового издания книги издательствам следовало бы, сделав сводку сообщаемых им погрешностей в вышедших книгах и исправив их (совместно с автором), печатать перечни всех недочетов, обнаруженных в выпущенных в продажу книгах, и их исправлений и рассылать эти перечни по библиотекам и книжным магазинам для раздачи желающим (таковыми будут, конечно, только обладатели соответствующей книги). Для поощрения читателей можно было бы даже, в случае обнаружения более тонких математических дефектов, печатать фамилию (и адрес) первого, известившего об этом редакцию, либо премировать его (хотя бы книгой того же издательства по выбору). Быть может вместо таких отдельных листовок, или даже наряду с ними, следовало бы периодически выпускать сводки обнаруженных ошибок в книгах и статьях (по всем математическим дисциплинам сразу, либо по отдельным дисциплинам), тоже с указанием имен лиц, нашедших ошибки. Получилось бы нечто вроде тех листков, которые, под названием „Общественная трибуна“, редакция французского издания Большой математической энциклопедии прилагала к каждому ее выпуску. Такое издание,

несомненно, самым действительным образом содействовало бы установлению контакта между авторами и читателями, а также читателей между собою. Замечания более тонкого порядка (даже спорные в глазах редакции такой „Трибуны“) могли бы дать повод к взаимной переписке читателей и авторов. Это связало бы в одно целое бесконечным числом нитей частной переписки всю армию советских математиков, разбросанных по всем углам страны, от академиков и профессоров до сельских учителей математики и учеников средней школы.

В таком издании можно было бы помещать не только исправления ошибок, но и вообще вопросы научного и библиографического характера по математике и ответы на них (как это делалось в журнале „Mathesis“). Приведу пример пользы такого издания. Редактор недавно напечатанного перевода „Анализа бесконечно малых“ де-Лопиталья, А. П. Юшкевич, говорит в предисловии, что „чертежи представляют собой почти точные копии с чертежей издания 1768 г., поскольку первого издания книги не удалось найти ни в московских, ни в ленинградских библиотеках“. Если бы т. Юшкевич в свое время написал в проектируемой мною „Трибуне“ о том, что желательно иметь для перевода более раннее издание оригинала, то я, например, мог бы ему сообщить, что в библиотеке Одесского университета имеется второе издание (1716 г.).

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить редакцию этого сборника за любезную готовность дать место на его страницах этой статье, мысль о которой занимала меня уже давно. Думаю, что читатели сборника не станут отрицать необходимость борьбы с перечисленными мною дефектами. Меньше уверенности у меня в том, насколько они согласятся с предлагаемыми здесь средствами борьбы с ними. Но если мне удастся вызвать этой заметкой дискуссию по поднятым вопросам и тем сдвинуть их с мертвой точки, то я не буду считать свой труд потерянным. Из множества собранных мною примеров разных дефектов мне пришлось сделать для этой заметки определенный выбор, взяв их частью среди работ моих добрых знакомых, которые, надеюсь, не посетуют на меня. Читателей же прошу помнить мудрую пословицу: „не ошибается только тот, кто ничего не делает“ и приложить ее к цитированным мною авторам, и ко мне самому...

ПЕРЕЧЕНЬ ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проф. Д. М. Сінцов, С. М. Марчевська, В. М. Фесенко і М. П. Голубенко, під редактуванням Д. М. Сінцова, Початки математики (перевод с русского), Державне видавництво України, 1922 (28.100 экз.).

3. Підшевкин, Стислий (сжатый) курс тригонометрії, ДВУ. 1927, „ДНМК НКО УССР ... допустив до вжитку як підручник в педтехнікумах НКО“.

3. Проф. Б. Ф. Цомакион, Основы техники токов высокой частоты, 1935, Тираж 5000.

4. „Элементарная математика в средней школе“, сборник статей под ред. С. Е. Ляпина, Учпедгиз, 1934. Статья А. С. Кованько, Обоснование теории измерения поверхностей (стр. 156—160).

5. „Математическое просвещение“, сборник статей по элементарной и началам высшей математики, выпуски 1 и 2, 1934 и 1935.

6. Беляев, Курс вищої математики, ч. 1, 1928, изд. 1-е.
 7. Михайловський, Підшевкин, Сигидин, Підручник математики для профтех. шкіл, 1929, изд. 1-е.
 8. Н. Ф. Четверухин, Введение в высшую геометрию, Учпедгиз, 1934.
 9. А. Киселев, Алгебра, ч. 1, 1933, изд. 10-е („Рядянська Школа“), (24 000—44 000).
 10. Н. Билибин, Алгебра Бертрана, 1896, изд. 2-е.
 11. Проф. І. С. Огівецький, Диференціальне Числення, ч. 1, ДВОІ, Технічне видавництво, 1931.
 12. а) В. Гренвиль, Элементы дифференциального и интегрального исчисления, вып. 1, ГИЗ, 1922, изд. 2-е.
 - б) В. Гренвиль и Н. Лузин, то же название, ч. 1, 1930, 8-е переработанное и дополненное издание.
 - в) То же, 1933, изд. 13-е.
 13. М. Михаловський, Вступ до вищої математики, ДВУ, 1926 (допущено к употреблению в качестве учебника в вузах с.-хоз. вертикали).
 14. Кппорр, Funktionentheorie, I. Teil, 1913 (Sammlung Götschen), изд. 1-е.
 15. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities Cambridge University Press, 1934.
 16. а) E. Borel, Algèbre, Second cycle, Paris, 1904, изд. 2-е.
 - б) То же, 1905, изд. 3-е.
-

Решения задач предлагается присылать по адресу: Москва, Центр, Третьяковский проезд 1, Главная редакция общетехнической и технотеоретической литературы, Редакция сборников „Математическое просвещение“.

141. Высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины треугольника, разделили угол при этой вершине на 4 равных части. Найти углы этого треугольника.

Лембке (Валашов).

142. Построить треугольник ABC по стороне b и высоте h_a при условии, что сторона квадрата, вписанного в этот треугольник так, что его две вершины лежат на BC , равна диаметру окружности, вписанной в треугольник.

М. Ф. Зямин (Новочеркасск).

143. Доказать тождество

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = 120 C_{n+3}^6 + 30 C_{n+2}^4 + C_{n+1}^2.$$

В. А. Голубев (Каменка).

144. Показать, что уравнение $C_x^n + C_y^n = C_z^n$ имеет решения (разумеется, целые) при любом n .

В. А. Голубев (Каменка).

145. Решить в целых положительных числах уравнение

$$8x^2 - y^2 + 8x - 3y + 6 = 0.$$

П. П. Андреев (Москва).

146. Найти геометрическое место точки пересечения подвижной касательной к окружности с прямой, проводимой через данную на окружности точку перпендикулярно к хорде, соединяющей данную точку и точку касания.

Г. А. Ключарев (Куйбышев).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

105. 1. Дан неподвижный отрезок $AB = a$. Квадрат $APNM$ вращается вокруг вершины A в положительном направлении, изменяясь при этом так, что $AN^2 = BM^2 + BP^2$. а) Найти геометрическое место центра I квадрата $APNM$, а также его вершин M , N и P . б) Определить положение квадрата, если сторона PN (или ее продолжение) проходит через заданную точку G . Какой кривой касается PN в любом положении?

2. Ответить на те же вопросы а) и б), если размеры квадрата изменяются так, что сумма квадратов расстояний от точки B до четырех вершин квадрата постоянна и равна $10AB^2 = 10a^2$.

1. а) Рассмотрим произвольное положение квадрата (фиг. 1). Так как $AN = MP$, то $MP^2 = BM^2 + BP^2$ и угол PBM — прямой. Точка B лежит на окружности $AMNP$ с центром I , как вершина вписанного угла, опирающегося на ее диаметр. Имеем $AI = IB$; следовательно, точка I лежит на перпендикуляре,

восстановленном к AB из середины AB . Когда квадрат, изменяясь, будет вращаться, точка I будет скользить по этому перпендикуляру, причем может занимать на нем любое положение. Итак, прямая DE есть геометрическое место точки I .

Теперь $AN : AI = AB : AD = 2$ и $\triangle ABN \sim \triangle ADI$. Поэтому геометрическое место точки N есть перпендикуляр BF к AB в точке B .

Рассматривая вписанные в окружность углы, видим, что $\angle ABP = \angle AMP = 45^\circ$; $\angle NBM = \angle NAM = 45^\circ$. Следовательно, геометрические места точек M и P суть биссектрисы прямых углов, образованных прямыми AB и BN .

б) Так как $\angle CPA = 90^\circ$, то P есть точка пересечения окружности с диаметром AC с биссектрисой BC прямого угла ABF . В зависимости от числа точек пересечения задача может иметь 2, 1 и 0 решений.

Для определения огибающей заметим, что перпендикуляр PA , восстановленный к PN (касательная к искомой кривой) из точки пересечения ее с фиксированной прямой PB проходит через фиксированную точку A . Таким свойством может обладать только парабола с фокусом A и вершиной касательной CB (см., например, статью Извольского, "О параболах, вписанных в треугольник", Математическое просвещение, № 8, стр. 30). Итак, искомая огибающая — парабола.

2. а) Продолжим BI за точку I и отложим $IK = BI$; тогда $ABNK$ и $BMKP$ — параллелограммы (фиг. 2).

Имеем:

$$2AB^2 + 2BN^2 = BK^2 + AN^2;$$

$$2BM^2 + 2BP^2 = BK^2 + PM^2.$$

Но $AN = PM$, поэтому, складывая почленно, имеем:

$$AB^2 + BN^2 + BM^2 + BP^2 = BK^2 + AN^2 = 10a^2.$$

Теперь ID (D — середина отрезка AB) продолжаем за точку D и откладываем $DL = ID$. Имеем:

$$2AI^2 + 2IB^2 = AB^2 + IL^2$$

или

$$4AI^2 + 4IB^2 = 2AB^2 + 8ID^2,$$

или

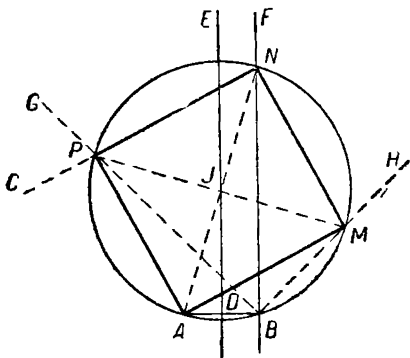
$$AN^2 + BK^2 = 2a^2 + 8ID^2 = 10a^2,$$

откуда $ID = a$. Значит геометрическое место точки I — окружность радиуса a с центром в D .

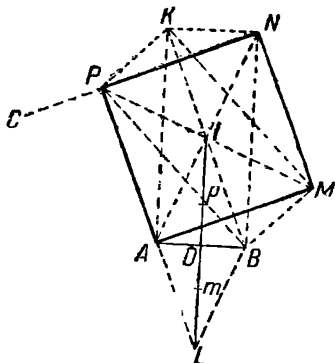
Но $AN : NI = AB : AD = 2$ и $\triangle ABN \sim \triangle ADI$, так что $BN = 2DI = 2a$. Следовательно, геометрическое место точки N — окружность радиуса $2a$ с центром в B .

Представим теперь, что вся фигура повернута вокруг точки A на угол в 45° и подобно увеличена в отношении $1 : \sqrt{2}$.

Тогда при любом положении квадрата точка I перейдет или в P , или в M (в зависимости от направления поворота). Следовательно, точки P и M движутся



Фиг. 1.



Фиг. 2.

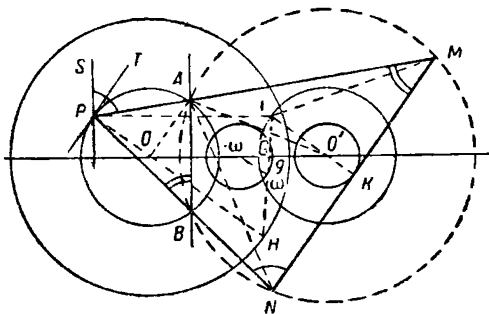
так, как точка I в этих новых положениях фигуры. Но центр круга, по которому движется I , при таком изменении фигуры перемещается в m или p , где m и p — вершины квадрата с диагональю AB . Значит геометрическое место точки P — круг с центром p , а точки M — круг с центром m радиуса $a\sqrt{2}$.

б) Пусть C — фиксированная точка, через которую проходит прямая PN . Точка P определяется как точка пересечения окружности с диаметром AC и окружности с центром p радиуса $a\sqrt{2}$. В зависимости от числа точек пересечения задача может иметь 2, 1 и 0 решений.

Для определения кривой, огибаемой семейством прямых NP , заметим, что перпендикуляр PA , восстановленный к касательной NP в точке P пересечения ее с фиксированной окружностью p , проходит через фиксированную точку A . Таким свойством обладает эллипс. Итак, огибающая — эллипс.

Д. Шлярский (Москва). Неполное решение прислал Б. У. Бритах (Днепропетровск).

106. Даны две окружности радиусов R и R' с центрами в точках O и O' ($OO' = d$), пересекающиеся в точках A и B .



Фиг. 3.

Точка P описывает окружность O ; M и N — точки пересечения хорд PA и PB с окружностью O' .

1. Определить огибающую MN .

2. Определить геометрическое место центра круга, описанного вокруг треугольника PMN , геометрическое место точки пересечения его высот и геометрическое место его центра тяжести.

3. Определить положения точки P на окружности O , при которых $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

4. Определить положения точки P , при которых окружность, описанная около треугольника PMN , пересекает окружности O и O' под равными углами; вычислить величину этих углов.

1. Угол APB (фиг. 3) не изменяется, так как опирается на постоянную дугу AB окружности O . Но этот угол определяется полуразностью дуг AB и MN окружности O' ; поэтому, так как дуга AB окружности O' остается постоянной, то и дуга MN , а следовательно и хорда MN окружности O' , неизменна по величине и вращается вокруг центра O' . Значит огибающей семейство прямых MN является окружность с центром в O' . Исключение составляет случай, когда MN — диаметр окружности O' ; тогда огибающая вырождается в точку. Можно установить (опустив из O' перпендикуляр $O'K$ на MN и выразив его длину через R, R' и d), что этот предельный случай имеет место при ортогональности заданных окружностей O и O' .

2. а) Пусть I — центр окружности, описанной вокруг треугольника PMN . Проведем в точке P касательную PS к этой окружности и касательную PT к окружности O . Заметив, что $\angle ABN = \pi - \angle AMN = \pi - \angle ABP$, т. е. что $\angle AMN = \angle ABP$, а $\angle ABP = \angle TPA$ или $\angle TPA = \angle AMN$, заключаем, что $MN \parallel PT$. Аналогично докажем, что $AB \parallel PS$.

Далее следует $PO \perp MN$ и $AB \perp PI$, откуда $PI \parallel OO'$. Перпендикуляр PO к MN параллелен перпендикуляру $O'I$ к середине MN , проходящему через центр I описанного круга PMN . Четырехугольник $OO'IP$ — параллелограмм и $O'I = OP = R$. Точка I описывает окружность радиуса R с центром в точке O' .

б) Из подобия треугольников PAB и PMN следует, что сходственные линии этих треугольников пропорциональны радиусам описанных окружностей. Но

радиус окружности, описанной около треугольника PAB , равен R ; а радиус окружности, описанной около треугольника PMN , равен $PU = OO' = d$.

Пусть H и h — ортоцентры треугольников PMN и PAB (точка h на фиг. 3 не показана). Очевидно $\frac{PH}{Ph} = \frac{d}{R}$, но Ph постоянно и равно удвоенному расстоянию от точки O до хорды AB (см., например, статью С. И. Зетеля, „Математическое просвещение“ № 7, стр. 17). Следовательно и PH постоянно. Далее $OH = PH - PO$, следовательно ортоцентр H треугольника PMN описывает окружность с центром в точке O .

с) Известно, что центр тяжести треугольника лежит на прямой, соединяющей ортоцентр с центром описанного круга и делит расстояние между ними в отношении 1:2, считая от центра описанного круга (теорема Эйлера. См. ту же статью С. И. Зетеля, „Математическое просвещение“ № 7, стр. 17—18). В нашем случае центр тяжести G треугольника PMN делит отрезок IN в отношении 1:2. Проведя $Gg \parallel OH \parallel O'I$, получим в пересечении с OO' точку g , делящую $O'O$ в отношении 1:2. Ввиду неподвижности и постоянства $O'O$, точка g неподвижна; благодаря постоянству длины IO' , длина отрезка Gg не изменяется. Точка G описывает окружность с центром в точке g , делящей отрезок $O'O$ в отношении 1:2.

3. Геометрическое место точки (см. фиг. 4), для которой $\frac{MA}{MB}$ постоянно, есть окружность, пересекающая отрезок AB , а следовательно, и дуги AB окружностей O и O' , каждую только в одной точке между A и B ; прямая MN , таким образом, пересекает отрезок AB между A и B . Применив теорему Птолея к четырехугольнику $MANB$, вписанному в окружность O' , имеем:

$$MN \cdot AB = MA \cdot NB + MB \cdot NA.$$

Но, по условию $MA \cdot NB = MB \cdot NA$, следовательно,

$$AC \cdot MN = MA \cdot NB = MB \cdot NA.$$

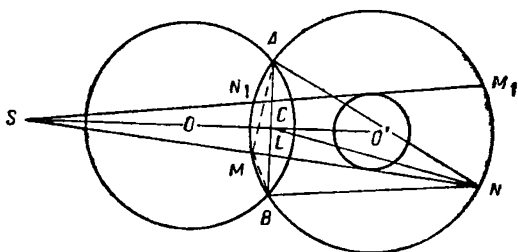
Здесь C — середина хорды AB ($AC = BC$).

Из предыдущего следует $\frac{MA}{AC} = \frac{MN}{NB}$.

Треугольники MAC и MNB подобны, так как имеют по равному углу ($\angle CAM = \angle MNB$, как опирающиеся на одну дугу и две пары пропорциональных сторон). Следовательно, $\angle ACM = \angle MBN$. Аналогично убедимся, что $\triangle NCB \sim \triangle NAM$ и, следовательно, $\angle NCB = \angle NAM$ но $\angle NAM + \angle NBM = 2d$, как противоположные углы во вписанном четырехугольнике и $\angle NCA + \angle NCB = 2d$, как смежные. Итак $\angle ACM = \angle NCA$, т. е. AC — биссектриса угла NCM , а линия центров $OO' \perp AC$ — биссектриса дополнительных углов.

Точки S и L гармонически сопряжены с точками M и N (это вытекает из рассмотрения биссектрис угла S треугольника (CMN)). Итак S — полюс хорды AB относительно окружности O' . Туда же ясно, что искомые положения хорды MN суть касательные, проведенные из точки S к окружности, огибаемой хордой MN . Соответствующие каждой из этих хорд положения точки P найдутся в пересечении хорд MA и NA и будут, очевидно, симметричны относительно OO' .

4. При инверсии всего чертежа с полюсом P и степенью инверсии $PA \cdot PM$, окружность O' преобразуется сама в себя, хорда MN — в окружность O , окружность O — в хорду MN , а окружность, описанная около треугольника PMN — в точку A . Если окружность, описанная около треугольника BMN пересече



ФИГ. 4.

кает до инверсии окружности O и O' под равным углом, то, после инверсии, хорда AB должна пересекать хорду MN и окружность O' под равными углами, т. е. хорда MN должна быть параллельна касательной к окружности O' в точке A или в точке B .

Для решения поставленного вопроса достаточно теперь провести касательную к окружности, огибаемой хордой MN , параллельно касательным к окружности O' в точках A и B . Четыре получившихся касательных определяют четыре решения задачи, четыре положения точки P , попарно симметричные относительно оси OO' .

Д. Ш и л я р с к и й (Москва). Не полное решение прислал Б. У. Б р и т а н (Днепропетровск).

В выпуске 4 „Математического просвещения“ за 1936 г. была помещена статья А. В. „Об уравнении $\sum_{x=1}^{x=n} N_x^3 = 0$, в которой излагается решение обобщенной задачи Эйлера. В „Алгебре“ (Anleitung zur Algebra) Эйлера можно найти решение задачи для $n = 4$:

$$[A^2 + BC]^3 + [B^2 + AD]^3 = [A^2 + BD]^3 + [B^2 + AC]^3,$$

где

$$\begin{aligned} A &= h^2 + 3k^2, & C &= 3k(f - g) - h(f + 3g), \\ B &= f^2 + 3g^2, & D &= 3g(h - k) - f(h + 3k), \end{aligned}$$

которое Эйлер дает (в неявном виде) в цепи логических дедукций.

Задача Эйлера неоднократно привлекала и будет привлекать внимание математиков, так как вопрос об общности решения этой задачи (даже для $n = 4$) повидимому еще не разрешен.

Было бы чрезвычайно ценным, если бы автор заметки, очевидно хорошо знакомый с задачей Эйлера и литературой о ней, дал исчерпывающую статью по этому вопросу.

Б. Оксенов (Ленинград).

В выпуске 5 „Математическое просвещение“ за 1936 г. помещена заметка Л. Р. „Об одной формуле Эйлера“, в которой автор предлагает простой вывод формулы $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ без помощи рядов. Мне кажется не меньший интерес должен представлять предложенный Лагранжем следующий ныне забытый вывод¹⁾.

Имеем тождество:

$$i(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x \quad (i = \sqrt{-1}),$$

отсюда

$$\frac{-\sin x + i \cos x}{\cos x + i \sin x} dx = i dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln(\cos x + i \sin x) = ix + \ln C,$$

или

$$\cos x + i \sin x = Ce^{ix}.$$

Для определения произвольного постоянного C положим $x = 0$, тогда $C = 1$.
Итак

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

М. Черплев (Ростов-на-Дону).

¹⁾ Следует заметить, что в заметке Л. Р. не только выводилась формула Эйлера, но и обосновывалось понятие о степени с мнимым показателем. Здесь же представление о степени с мнимым показателем предполагается известным.

(Прим. ред.)

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

УКАЗАТЕЛЬ КНИГ И СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ЗА ПЕРИОД С 1/VII 1935 по 1/I 1936 г.

Сокращения:

- А — Архив истории науки и техники.
Ж — Журнал Института математики Украинской Академии наук (Киев).
И. С. — Известия Северо-Кавказского индустриального института в Новочеркасске.
М. П. — Математическое просвещение. Сборник.
М. С. — Математический сборник.
М. Ф. — Математика и физика в средней школе.
Н. Ж. — Наука и жизнь.
П. З. М. — Под знаменем марксизма.
П. — Природа.
С — Эйлер Л., Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти.
Т. В. — Труды Воронежского государственного университета.
Т. К. — Труды Казанского института инженеров коммунального строительства им. Горького.

Сочинения общего характера

Галилей Галилео, Сочинения, т. I. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению, синьора Галилео Линчео, философа и первого математика светлейшего великого герцога Тосканского. С приложением о центрах тяжести различных тел. Перевод С. Н. Долгова. Редакция, предисловие и примечания А. Н. Долгова, 696 стр.

Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. Лекции, читанные в Геттингенском университете. Перевод с нем. Д. А. Крыжановского, под ред. В. Ф. Кагана, изд. 3-е. Пособие для университетов, т. I, Арифметика, Алгебра, Анализ.

Материалы совещания преподавателей математики средней школы, 1935, Учпедгиз. Статьи по разным вопросам преподавания математики.

Молодший В., Энгельс и математика, М. Ф., 4. Содержание: Предмет и факторы развития математики.

Мордухай-Болтовской Д. Д., Математика и логика в школе, М. П., 4. Содержание: Суждения. Виды суждений. Умозаключение. Принцип полной математической индукции. Силлогизм. Теорема Гаубера. Геометрические примеры.

Труды 2-го Всесоюзного математического съезда, Л., 1934, т. I. Пленарные заседания и обзорные доклады, 371 стр. с 19 фиг. Содержание: Предисловие. Подготовка. Дневник работ съезда. Программа. Список членов съезда. Протокол заседания (открытия). Протокол пленарного заседания, посвященного обсуждению вопроса о развитии научной работы по математике в СССР и задаче научно-исследовательских институтов. Протокол заключительного заседания. Резолюция Съезда, принятая 30/VI 1934. Внесекционные (обзорные) доклады.

Шредингер Е., О неприменимости геометрии в микромире, перевод из „Naturwissenschaften“ 1934, 31, с предисловием Ф. Гальперина и М. Маркова, П. З. М., 4.

Яновская С., О так называемых „определениях через абстракцию“. О процессе образования понятий в математике и в других науках, П. З. М., 4.

История математики

Александров П. С. Урысон П. С. (К десятилетию со дня смерти), М. П., 4. Содержание: Работы Урысона в теории размерностей. Биографические данные. С портретами.

Бернштейн С. Н., О математических работах П. Л. Чебышева, П. 2.

Венков В. А., Работы Эйлера в теории чисел, С.

Выгодский М. Я., Возникновение дифференциальной геометрии, А., VI.

Кошляков Н. С., Вариационное исчисление Эйлера, С.

Крылов А. Н., Леонард Эйлер, С.

Лурье С. Я., Неопубликованная научная переписка Л. Эйлера, С.

Лурье С. Я., Эйлер и его „исчисление нулей“, С.

Цейтлин З. А., Галилей. Биография. С иллюстрац., изд. Жургаз.

Чернов С. Н., Л. Эйлер и Академия Наук, С.

Чистяков И., Краткий очерк истории математики в Японии, М. Ф., 6. Содержание: Развитие арифметики в Японии. Нумерация. Работы Секи-Кова. Решение неопределенных уравнений. Японское доказательство теоремы Пифагора. Круговая теория.

Штрайх С. Я., С. Ковалевская. Биография. С иллюстр., портретами и факсимиле. Изд. Жургаз.

Эйлер Леонард (1707—1783), Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд. Акад. Наук, под ред. акад. А. М. Деборина, 240 стр.

Арифметика и теория чисел

Виттинг А., Приближенные вычисления, перевод Б. Каминского, с дополнениями Л. А. Люстерника. Содержание: О приближенных числах вообще. Четыре арифметических действия. Степени и корни. Логарифмы. Приращения и дифференциалы.

Костриц Б., Простой способ вывода практически удобных признаков делимости на все нечетные простые числа первой сотни (кроме, 5) М. Ф., 6.

Хинчин А. Я., Цепные дроби. Содержание: свойства аппарата. Изображение чисел цепными дробями. О трансцендентных Лиувилля. Метрическая теория цепных дробей. Проблема Гаусса. Теорема Кузьмина.

Задачи по теории чисел: М. П. № 16, 84; М. Ф., 4, № 3, 5, 7, 9; М. Ф., 5, № 2, 6, 7, 14; М. Ф., 6, № 5.

Алгебра

А. В., Об уравнении $\sum_{x=1}^n N_x^2 = 0$ (задача Эйлера), М. П., 4.

Виноградов С. П., Основания теории детерминантов, изд. 4-е.

Граве Д., Арифметическая теория алгебраических величин (на укр. яз.), Ж. 3—4.

Диксон Л. Е., Линейные алгебры, Харьков, перев. с англ. В. В. Никишева. Содержание: Определения, иллюстрации и элементарные теоремы. Матрицы. Состав кватернионов. Единицы. Пересмотр общей теории Картана комплексных линейных ассоциативных алгебр с модулем. Разделение алгебр. Отношение линейных алгебр к другим предметам. Взгляды Дедекинда. Линейные алгебры над полем F . Алгебры Вейерштрасса. Делительные алгебры.

Извольский Н. А., О формуле Кардана, М. П., 4.

Кириллов А. В., О применении трафаретов к решению уравнений по методу Грегге, И. С., 1 (XV).

Литвиненко А. Я., Нахождение рациональных корней численного уравнения, М. П., 4. Предлагаемый автором способ устраняет испытание большей части делителей свободного члена; при этом он не требует нахождения границ корней. Примеры.

Сушкевич А. К., Высшая алгебра, изд. 3-е, Харьков—Киев (на укр. яз.). В новом издании увеличена библиография и расширена глава о матрицах. Приложен терминологический словарь.

Улаковский В. П., Элементарные сведения из теории определителей изд. 2-е. Приведены исторические данные и задачи (51).

Шайкевич М., Случай появления посторонних корней в иррациональных уравнениях с радикалами 3-й степени, М. Ф., 5.

Шапиро Г. М., Высшая алгебра, Учпедгиз, учебник для высш. педагогических учебн. завед. Библиография: 39 русс. и иностр. названий.

Задачи по алгебре: М. Ф., 4, № 2, 4, 6, 8, 10, 17, 18, 19; М. Ф., 5, № 1, 12, 13; М. Ф., 6, № 1, 2, 6, 7, 8.

Анализ

Белоцерковский Б. В., Начатки высшей математики для квалифицированного рабочего, мастера, изобретателя, рационализатора. 2-е переработ. изд. Содержание: Функция и ее графическое изображение. Составление эмпирических формул. Номограммы. Счетная линейка. Дифференциал функции. Что такое интеграл? С 129 рис. и 156 задачами с решениями.

Березайская Е., Тригонометрические уравнения и методика их преподавания, Учпедгиз.

Бончковский Р. Н., Исследование функции 3-й степени на максимум и минимум элементарными средствами, М. П., 4.

Вельмин В. П., Приближенное вычисление остаточных членов бесконечных рядов, И. С., 1 (XV).

Вельмин В. П., Остаточные члены формул механических квадратур, И. С., 1 (XV).

Вельмин В. П., Об остаточном члене формулы Симпсона, И. С., 1 (XV).

Виттакер Э. Т., Математическая обработка результатов наблюдений, Перев. с англ. под ред. Н. М. Гюнтера, 2-е изд.

Гангиус Г., Об одном преобразовании многочленов, содержащих тригонометрические функции, М. Ф., 6.

Жегалкин И. И., Слудская М. И., Введение в анализ, Учпедгиз.

Жегалкин И. И., Слудская М. И., Курс анализа, ч. 2-я. Дифференциальное исчисление. Для педагогич. ин-тов, Учпедгиз.

Зимин М. Ф., Особый случай простейшей задачи вариационного исчисления, И. С., 1 (XV).

Корсаков Б., Элементарное доказательство обобщенной теоремы умножения гамма-функций, М. П., 4. Новое доказательство обобщенной теоремы умножения, полученной Шаблюхом, автор выводит из теоремы умножения Гаусса и прилагает это доказательство к обобщенной теореме умножения синуса. Библиография—5 названий.

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3-е изд., переработанное и значительно дополненное, 541 стр. с 76 фиг. Содержание: Введение. Общие правила приближенных вычислений. Решение численных уравнений. Приближенное вычисление определенных интегралов. Механические приборы для вычисления определенных интегралов. Разложение функций в тригонометрические ряды. Формулы, выражающие связь между суммой и интегралом, разностями и производными. Формулы интерполирования. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений. Способ наименьших квадратов.

Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, 2-е исправл. и дополн. изд. Приведены интегралы, связанные с бесселевыми функциями. Изложена теория гамма-функций. Таблицы.

Лаврентьев и Люстерник Л. А., Вариационные исчисления, т. I, ч. 1-я, учебное пособие для вузов.

Марков А. А., Об одной задаче на экстремум, И. С., 1 (XV).

Марков А. А., К вопросу о расширении области применения метода итераций, И. С., 1 (XV).

Мочульский А. А., Упрощенный способ графического определения коэффициентов ряда Фурье, М. П., 4. Автор излагает упрощенный графический метод Роте.

Лопиталь Г. Ф., Анализ бесконечно малых. Перев. с фр. Н. В. Леви, под ред. и со вступит. статьей А. П. Юшкевича.

Привалов И. И., Интегральные уравнения, Содержание: Теория и приложения. Упражнения, 248 стр.

Привалов И. И., Основы анализа бесконечно малых. Пособие для учителей.

Сегель М. М., Решение трансцендентных уравнений при помощи логарифмической линейки с обычными и новыми шкалами, Т. К., 2.

Серпинский В., Сечение. Перевод с польского Н. Плескачевского, М. Ф., 4. Статья является введением в теорию иррациональных чисел и снабжена предисловием переводчика, разъясняющим польские математические термины.

Стефенсон Д. Ф., Теория интерполяции, перевод с англ. И. Н. Хлодовского.

Тарасов Н. П., Курс высшей математики для техникумов.

Штаерман И. Я., Гиперболические функции. Содержание: Вступление. Аналитическое определение г. ф. Связь г. ф. с тригонометрическими. Пределы изменяемости г. ф. Основные соотношения. Формулы суммы и разности гиперболич. функции. Рациональные выражения г. ф. Формулы г. ф. кратных аргументов. Геометрическое представление г. ф. Трансцендентный угол. Обратные г. ф. Производные г. ф. Интегралы от г. ф. Ряды и приближенные формулы для вычисления г. ф. Гетифункции. Вычисление г. ф. Применение гетифункций к интегрированию дифференциальных уравнений 4-го порядка. Решение кубического уравнения посредством г. ф. Таблицы г. ф. и их десятичных логарифмов.

Задачи по анализу: М. П., 4, № 83, 84.

Геометрия

Анонов Д. Г., Курс начертательной геометрии, изд. 5-е. С отдельным альбомом чертежей. Для промышленных вузов.

Бляшке В., Дифференциальная геометрия, ч. I. Элементарная дифференциальная геометрия. Перев. М. Я. Выгодского.

Богомолов С., Суммы углов вогнутого многоугольника, М. Ф., 5.

Бончковский Р. Н., Заполнение пространства тетраэдрами, М. П., 4. Автор рассматривает тетраэдры, заполняющие пространство сплошь без разрывов и двойных покрытий и таких, что два тетраэдра, имеющие общую грань, симметричны друг другу относительно этой грани.

Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия, концентры 2-й и 3-й.

Вольберг О. А., Основные идеи проективной геометрии, изд. 2-е, переработанное и дополненное.

Гамбье Б., Соотношения Эйлера между кругом, описанным около треугольника, и кругами, касательными к трем сторонам этого треугольника. Перев. Н. А. Путята, М. П., 4.

Гиршвальд Л. Я., Проективная геометрия, Харьков. Содержание: Теория проективного соответствия. Проективные свойства кривых 2-го порядка. Способы сокращенных обозначений в аналитической геометрии. Тангенциальные координаты.

Глаголев Н. А. (редактор), Номографический сборник (сборник работ научно-исследовательского семинара по номографии).

Гохман Э., Введение в тензорное исчисление, Харьков — Киев. Содержит основы тензорного исчисления и геометрии Римана в объеме университетского курса. Содержание: Понятие о ковариантах и контравариантных координатах вектора. Криволинейные координаты. Матрицы и квадратичные формы. Тензорная алгебра. Риманова геометрия. Тензор Римана-Кристоффеля. Тожество Бианки. Гиперповерхности в пространстве. Теорема Шура.

Гримм Г. Д., Пропорциональность в архитектуре. С иллюстр. Книга содержит теорию золотого сечения и его приложений.

Делоне Б. и О. Житомирский, Задачи по геометрии, изд. 2-е. Отдел планиметрических задач составлен Житомирским, отдел стереометрических — Делоне. Всего 506 задач с решениями. Помещены задачи из топологии и теории многогранников.

Житомирский О. К., Львовский В. Д., Милинский В. И., Задачи по высшей геометрии, ч. I. Около 250 задач с решениями и указаниями.

При каждом отделе вводная статья *Analysis situs* (Львовский), проективной геометрии (Житомирский), кинетическая геометрия (Милинский).

Зетель С. И., Вычисление площадей некоторых треугольников проекций, М. П., 4.

Зетель С. И., Некоторые свойства прямых Чебы, М. П., 4.

Зимин М. Ф., О бирациональных парах треугольников, И. С., 1 (XV).

Иванченко М. М., Кривые, связанные со взаимными окружностями, М. П., 4.

Иванченко М. М., Обобщенные конхоидальные кривые, М. П., 4.

Иглиш Р., О делении угла на три равные части и об удвоении куба при помощи циркуля и угольника, М. Ф., 5. Перевод статьи из „*Zeitschrift für mathem. und naturwiss. Unterricht*“.

Извольский Н. А., Геометрия Понселе, М. П., 4. Содержание очерка охватывает материал первого тома „*Traité des propriétés*“ Понселе.

Извольский Н., О метрических соотношениях в треугольнике, М. Ф., 6.

Иовлев Н., Очерки по геометрии Лобачевского, Очерк первый, М. Ф., 6. Содержание: Значение геометрии Лобачевского. Определение. Постулат. Аксиома. Математическое доказательство. Аксиома и постулаты Эвклида. Аксиома Архимеда. Постулат параллельных. Доказательства Валлиса, Нассир-Эддина, Больяи, Лежандра, Саккери. Свойства пространства Лобачевского.

Костровицкий И., Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, М. Ф., 5.

Марков А. А., К вопросу о построении прямоугольников наименьшей площади, заключающих в себе данную систему кругов, И. С., 1 (XV).

Марков А. А., К вопросу о проективном методе построения логарифмической шкалы, И. С., 1 (XV).

Панов Д. Ю., Вычисление площадей. Содержание: Прямолинейные фигуры. Круг. Парабола. Луночки Гиппократа. Приближенное и точное вычисление криволинейных фигур. С рис. и портретом Архимеда.

Привалов И. И., Аналитическая геометрия, изд. 8-е, переработанное и дополненное.

Радзишевский Л. П., О геометрических аксиомах расположения системы Гильберта, М. П., 4.

Синцов Д. М., Дифференциальная геометрия, изд. 2-е, Харьков (на укр. яз.). Содержит элементы теории кривых и поверхностей.

Синцов Д. М., Циссоиды эллипса и гиперболы, М. П., 4.

Синцов Д. М., О выводе выражений для меры кривизны и меры кручения, М. П., 4. Содержание: Кривизна. Случай плоской кривой. Пространственная кривая. Кручение — вторая кривизна.

Фишман Н. М., Векторы на плоскости, под общей редакцией проф. Л. А. Люстерника.

Цюльке П., Геометрическое построение на ограниченном куске плоскости, перевод А. Ю. Депутовича. Содержание: Исторические сведения. Недоступные точки пересечения двух и более прямых. Деление пополам угла с недоступной вершиной. Построения в треугольниках и многоугольниках с недоступными вершинами. Задачи из теории окружностей. Краткие сведения о специальной литературе.

Черняев М. П., Об одном свойстве системы двух кругов, М. П., 4.

Черняев М. П., Два свойства астроида, М. П., 4. Содержание: Связь между эллипсом, параболой и астройдой.

Четверухин Н. Ф., Введение в высшую геометрию. Учебник для высших педагогических учебных заведений, изд. 2-е, Учпедгиз. С портрет. и чертежами.

Задачи по геометрии, Н. Ж., 11, № 3; М. П., 4. № 74, 77, 79, 80, 81, 82; М. Ф., 4, № 88, 14, 15, 16, 20; М. Ф., 5, № 3, 5, 10, 11, 15; М. Ф., 6, № 3, 4, 9, 10.

Задачи по тригонометрии, М. Ф., 4, № 11, 12, 13; М. Ф., 5, № 4, 8, 9.

Таблицы и справочники

Баженов Г. М., Таблицы для решения уравнения Кеплера с помощью арифмометра, Т. В., т. 8, вып. 1.

Ветчинкин В. П., Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций, с приложением сокращенных семизначных таблиц логарифмов чисел и тригонометрических величин. стр. 47. Изд. В.-В. Ак. РККА.

Мамедбердыев А. и Габитов М. А., Русско-туркменский математический словарь, Туркмениздат, стр. 107.

Никишин В. В., Словарь происхождения математических терминов, Харьков — Киев, стр. 51 (укр. яз.).

Цыкунов А., Справочник по математике. Формулы алгебры, тригонометрии, геометрии, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления. Томск. Литограф. 71 стр.

Чудов А. А., Таблицы деления и умножения многозначных чисел на двузначные.

Библиография

Морев В., Методико-математическая библиография по темам, М. Ф., 5. Содержание: Признаки делимости чисел (38 названий). Теорема Пифагора (28 названий). Теорема Гюльдена (16 названий).

Морев В., То же, М. Ф., 6. Содержание: Длина окружности и площадь круга (71 название). Формула Герона (9 названий).

Синцов Д., Ко 2-му всесоюзному математическому съезду. Портреты знаменитых математиков, М. П., 4.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
И. И. Трифонов, Об одном свойстве тетраэдра	3
Н. А. Извольский, О треугольнике минимального периметра, вписанном в остроугольный треугольник	5
П. П. Андреев, Циркулярная номограмма квадратного уравнения на декартовой сетке	10
А. Я. Граусман, Квадрат Эйлера	12
В. А. Скрылев, О приводимости симметрической функции вида $\sum_{i=1}^n x_i^k + mx_1x_2 \dots x_n$	27
В. А. Скрылев, Об одном признаке существования комплексных корней целой рациональной функции	22
Н. Г. Павлов, Решение одного функционального уравнения	25
А. И. Узков, Два примера решения задач с помощью функциональных уравнений	27
Э. К. Хилькевич, Несколько свойств перспективных треугольников	30
Б. Каминский, Кривизна нормальных сечений поверхности	33
С. С. Бюшгенс, О качении кривой	40
Д. А. Крыжановский, Как не следует писать и издавать массовую математическую литературу	48
Задачи	60
Решения задач	60
Письма читателей	65
Библиография	66

Опечатки

страница	строка	напечатано	следует читать	виновник
11	1 снизу	$\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$	$\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$	тип.
61	18 сверху	и с биссектрисой	с биссектрисой	ред.
61	26 сверху	вершиной	вершиной	ред.